Noyaux de Tate et capitulation

David Vauclair

Résumé

Following Kahn, and Assim & Movahhedi, we look for bounds for the order of the capitulation kernels of higher K-groups of S-integers into abelian S-ramified p-extensions. The basic strategy is to change twists inside some Galois-cohomology groups, which is done via the comparison of Tate Kernels of higher order. We investigate two ways : a global one, valid for twists close to 0 (in a certain sense), and a local one, valid for twists close to 1 in cyclic extensions. The global method produces lower bounds for abelian p-extensions which are S-ramified, but not $\mathbb{Z}_p$-embeddable. The local method is close to that of [1], but is improved to take into consideration what happens when S consists of only the p-places. In contrast to the first one, one can expect this second method to produce non trivial lower bounds in certain $\mathbb{Z}_p$-extensions. For example, we construct $\mathbb{Z}_p$-extensions in which the capitulation kernel is as big as we want (when letting the twist vary). We also include a complete solution to the problem of comparing Tate Kernels.

Mathematics Subject Classification 2000 : 11R23, 11R34, 11R70
Key words : capitulation, Tate Kernels, cup product, K-theory of number fields.

Introduction

Soit F un corps de nombres, et notons $\mathcal{C}l_F$ son groupe de classes d'idéaux. Pour toute extension galoisienne E/F, l'extension des idéaux induit une application dite de "capitulation" $\mathcal{C}l_F \to (\mathcal{C}l_E)^G$, où G désigne le groupe Galois de E/F. L'étude des noyaux et conoyaux de l'application de capitulation est un sujet classique en théorie des nombres. Citons seulement le théorème de l'idéal principal et la formule des genres dans une extension cyclique (voir aussi [5] pour une étude dans le cadre de la théorie d'Iwasawa). Puisque les

K-groupes pairs constituent des analogues supérieurs du groupe de classes, il est naturel de s'intéresser aussi à l'application de capitulation suivante : $K_{2i-2}\mathcal{O}_F \to (K_{2i-2}\mathcal{O}_E)^G$ pour $i \geq 1$. Comme $K_0\mathcal{O}_F = \mathcal{C}l_F \oplus \mathbb{Z}$ (ici $i = 1$), il s'agit d'une généralisation de l'étude précédente. Si l'on adopte le point de vue p-adique, la conjecture de Quillen-Lichtenbaum nous ramène à l'étude de l'application de capitulation suivante : $res^{(i)}(E/F) : H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G$ (cohomologiquement c'est la restriction). Ici $S = S_p \cup S_\infty$ est l'ensemble des places p-adiques et archimédiennes de F, et $H^q_S(F, -)$ désigne la cohomologie continue du groupe de Galois $G_{S,F}$ de l'extension S-ramifiée maximale F_S/F.

Dans cet article, on s'intéresse au noyau de capitulation $cap^{(i)}(E/F) := Ker\,(H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G)$ (avec les notations évidentes) dans le contexte suivant : $S \supset S_p \cup S_\infty$ est un ensemble fini de places de F, E/F est une p-extension S-ramifiée abélienne finie, et i est un entier relatif quelconque (en fait, la méthode s'étendrait sans difficulté en remplaçant $\mathbb{Z}_p(i)$ par une $\mathbb{Z}_p$-représentation continue...). Par analogie avec le cas classique ($i = 1$), il est naturel chercher une extension canonique E/F, dans laquelle $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule. Si i est suffisamment "proche" de 0 (au sens où $i \equiv 0\, mod[F(\mu_{p^n}) : F]$ avec n suffisamment grand) et si $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est d'exposant p^k, alors la p^k-extension S-ramifiée abélienne élémentaire E de F convient. Néanmoins il ne semble pas raisonnable de considérer ce résultat élémentaire comme un analogue supérieur du théorème de l'idéal principal ; ne serait-ce qu'à cause de la taille de l'extension ainsi obtenue : elle est bien plus grosse que le corps de Hilbert. Cependant, on ne peut espérer de résultat général en imposant des conditions supplémentaires concernant la ramification aux places de S (cf [13] pour une discussion à ce sujet, et [14] pour des détails). On choisit donc une approche alternative, et l'on s'intéresse à la question suivante, posée par B. Kahn (cf [6]) :

(Q) *Pour E/F fixée, peut-on minorer l'ordre de $cap^{(i)}(E/F)$?*

Cette question a été étudiée par [1] dans le cas où E/F est une extension cyclique de degré p. Malheureusement, les bornes obtenues par les auteurs précités sont triviales lorsque $S = S_p \cup S_\infty$, et c'est l'une des motivations du présent travail que d'y remédier. Comme dans [1], la stratégie de base est celle du "changement de twist", pour se ramener aux twists classiques $i = 1$ ou $i = 0$, où les groupes de cohomologie possèdent une interprétation concrète, ce qui permet d'obtenir des bornes explicites lorsque i est suffisamment proche de 0 ou de 1. Le changement de twist est rendu possible grâce à la comparaison de

certains noyaux de Tate modulo p^k, à laquelle est consacrée la première partie de l'article (section 2). Ce type de comparaison, dont l'idée remonte à [3], est déjà présent dans [1] ou [4] (voir aussi [15]). Néanmoins le traitement présenté ici est à la fois plus direct et plus précis (il ne nécessite pas la présence de "suffisamment" de racines de l'unité). En utilisant systématiquement certains cup produits, on donne notamment une expression précise de la différence entre les noyaux de Tate aux différents twists.

Concernant la question (Q), on obtient deux types de bornes. La première est de nature globale. Elle est valable lorsque i est suffisamment proche de 0 et concerne le cas où E/F est une p-extension abélienne. On obtient essentiellement $o(cap^{(i)}(E/F)) \geq [E : E \cap \tilde{F}]$, où $\tilde{F}/F$ désigne la composée de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F. La seconde borne obtenue est de nature locale. Elle est valable lorsque i est suffisamment proche de 1, et concerne le cas où E/F est cyclique de degré p^k. Notant $\hat{U}'_F$ les p-unités complétées de F qui sont localement des normes universelles dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, on minore essentiellement l'ordre de $cap^{(i)}(E/F)$ par celui de l'image de $\hat{U}'_F$ dans $\oplus_{v\in S} G(E_v/F_v)$ par la somme directe des applications de réciprocité locales. Cette seconde minoration, bien que peu explicite, permet d'obtenir une borne non triviale pour $cap^{(i)}(E/F)$ dans le cas où E/F est $\mathbb{Z}_p$-plongeable et vérifie certaines hypothèses. Ce dernier cas - inaccessible pour la minoration globale - est de loin le plus difficile et le plus intéressant, à cause de son lien avec la conjecture de Greenberg généralisée ([13], [14]). Les résultats présentés dans cet article contiennent ceux de [1] (où $S \supsetneq S_p \cup S_\infty$), mais sont valables aussi dans le cas crucial où $S = S_p \cup S_\infty$. On notera aussi que la méthode locale est spécifique aux twists $i \neq 1$, et ne produit rien concernant la capitulation du groupe de classes (pour lequel l'analogue de la question (Q) reste un mystère en général...).

1 Préliminaires

Dans ce paragraphe, on introduit quelques notations générales, et on rappelle sans preuve quelques résultats utiles pour la suite.

Soit F un corps de nombres, p un nombre premier impair, et $S \supset S_p \cup S_\infty$ un ensemble fini de places de F, contenant les p-places et les places archimédiennes. On note G_F (resp. $G_{S,F}$) le groupe de Galois d'une clôture algébrique fixée $\overline{F}/F$ (resp. de l'extension S-ramifiée maximale F_S/F) ; E/F désignera toujours une p-extension S-ramifiée, galoisienne de groupe G. Pour

chaque place v de F, on note F_v (resp. $k_v(F)$) le complété de F (resp. le corps résiduel de F) en v. Désignons par $H^q(F,-)$ (resp. $H^q_S(F,-)$) le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie continue de G_F (resp. $G_{S,F}$). Rassemblons en une proposition quelques faits utiles.

Proposition 1.1
1. $cd_pG_F = cd_pG_{S,F} \leq 2$ (cf [9]). En particulier, la corestriction donne

$$H^2_S(E,\mathbb{Z}_p(i))_G = H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

2. La cohomologie de $G_{S,F}$ et celle de G_F sont reliées par une suite exacte de localisation (cf [11]), qui donne ici :

(i) Pour $i \neq 1$, on a $H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) = H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))$, et il y a une suite exacte

$$H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \quad \hookrightarrow \quad H^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) \quad \twoheadrightarrow \quad \oplus_{v\notin S} H^1(k_v(F),\mathbb{Z}_p(i-1))$$

(ii) Pour $i = 1$, on a deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(1)) & \to & H^1(F,\mathbb{Z}_p(1)) & \twoheadrightarrow & \oplus_{v\notin S}\mathbb{Z}_p \\ \mathcal{C}l^S_F\otimes\mathbb{Z}_p & \hookrightarrow & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(1)) & \to & H^2(F,\mathbb{Z}_p(1)) & \twoheadrightarrow & \oplus_{v\notin S} H^1(k_v(F),\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Ici $\mathcal{C}l^S_F$ désigne le groupe de classes de $\mathcal{O}_{S,F}$ (les S-entiers de F).

□

Si $F_\infty = \cup F_n$ est une $\mathbb{Z}_p$-extension de F, on définit $\mathcal{H}^q_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) := \varinjlim H^q_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$ (resp. $H^q_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) := \varprojlim H^q_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$) par limite inductive via la restriction (resp. limite projective via la corestriction).

Définition 1.2 *On dit que i est bon (ou parfois F-bon) si $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ est fini. On dira ausi que i est mauvais s'il n'est pas bon.*

Rappelons que 1 est bon si et seulement si p ne se décompose pas dans F. Par ailleurs il est conjecturé que tout $i \neq 1$ est bon (cf [9]). Pour $i = 0$, c'est la conjecture de Leopoldt ; pour $i \geq 2$, c'est une conséquence de la conjecture de Quillen-Lichtenbaum, et un théorème de Soulé. Par la théorie d'Iwasawa, i est bon si et seulement si $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ est fini.

Par fonctorialité, le cup produit passe à la limite et donne un accouplement :

$$\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p) \stackrel{\cup}{\to} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \qquad (1)$$

Notant $\Gamma := G(F_\infty/F)$, on a $cd_p\Gamma = 1$ si bien qu'il y a un isomorphisme canonique $H^1_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p)^\Gamma = Hom_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}_p)$ (voir [13] pour plus de détails). Le choix d'un générateur de Γ détermine donc un élément $\alpha \in H^1_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p)^\Gamma$, et le cup produit (1) avec l'élément α donne lieu, lorsque qu'on le compose avec la restriction $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$, à un homomorphisme

$$m_\alpha : H^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$$

Proposition 1.3 *L'homomorphisme construit ci-dessus s'inscrit dans une suite exacte, valable pour toute $\mathbb{Z}_p$-extension :*

$$H^1_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))_\Gamma \;\to\; \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \;\stackrel{m_\alpha}{\to}\; H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \;\to\; 0$$

Preuve : si $i \neq 0$, la preuve fait l'objet du premier paragraphe de [13]. Pour $i = 0$, on renvoie à l'appendice de [16].

□

A partir d'ici et dans tout le reste de l'article, F_∞/F désigne exclusivement la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F. Notons $X'(F_\infty) := \varprojlim \mathcal{C}l^{S_p}_{F_n} \otimes \mathbb{Z}_p$. Après passage à la limite projective, la suite exacte de localisation devient

$$0 \;\to\; X'(F_\infty) \;\to\; H^2_{Iw,S_p}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \;\to\; \mathbb{Z}_p[S_p(F_\infty)] \;\to\; \mathbb{Z}_p \;\to\; 0$$

Dans ce contexte, la conjecture de Gross prédit que $X'(F_\infty)_\Gamma$ est fini (donc $X'(F_\infty)_\Gamma$ aussi). Si l'on note $\hat{U}'_F \subset \overline{U}'_F$ le sous-groupe du p-complété des p-unités formé par les normes universelles locales dans F_∞/F, il est bien connu que la conjecture de Gross équivaut à l'égalité $rg_{\mathbb{Z}_p}\hat{U}'_F = r_1 + r_2$ (cf [2]) ; r_1 (resp. r_2) désignant le nombre de places réelles (resp. complexes) de F.

2 Noyaux de Tate généralisés

Dans cette section, on étudie comment varient les groupes $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$ avec i. Plus loin, les résultats obtenus ici nous permettront d'effectuer le changement de twist nécessaire à l'obtention de bornes explicites pour la capitulation dans une extension fixée. Pour des raisons qui seront détaillées plus bas, on appelle $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$ le $i^{ième}$ *noyau de Tate modulo* p^k et on le note $V^{(i)}(F, p^k)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le notera simplement $V^{(i)}$. Lorsque $i \equiv j \, mod \, [F(\mu_{p^k}) : F]$, on peut voir $V^{(i)}(F, p^k)$ et $V^{(j)}(F, p^k)$ comme deux sous-groupes de $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) = H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$. Il s'agit alors de comprendre la différence entre ces deux sous-groupes. Ce type de comparaison entre les différents noyaux de Tate a déjà fait l'objet de nombreuses études, et il peut donc être utile de justifier celle qu'on va entreprendre ici. Tout d'abord, les résultats présents dans la littérature concernent le cas particulier où $k = 1$ et $F \supset \mu_p$, et ne sont donc pas suffisamment précis pour les besoins de la section suivante, où nous seront confrontés au cas k quelconque et $\mu_{p^k} \nsubseteq F$. Ensuite, la méthode originale présentée ici est plus directe (contrairement à celle de [3], généralisée dans [15], on n'utilise que très peu la théorie d'Iwasawa), et donne une réponse définitive à la question suivante (d'un intérêt indépendant) :

Question 2.1 *(cf [3], question de Coates) A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on* $V^{(i)} = V^{(j)}$ *?*

A la différence de [15], l'étude faite ici est non asymptotique. En interprétant un certain cup produit par montée et descente dans la tour cyclotomique, à la manière de [13], on obtient une expression exacte de la différence entre $V^{(i)}$ et $V^{(j)}$ au niveau fini. Par exemple si $i, j \geq 2$ (où plus généralement si i et j sont bons, au sens de 1.2), on réalise $V^{(i)}/V^{(j)} \cap V^{(i)}$ comme un certain sous-groupe de $cap^{(j)}(F_\infty/F)$. Naturellement, le cas $i = 1$ (et plus généralement celui des mauvais i) demande une attention particulière, et l'on doit y définir un noyau de Tate modifié $\hat{V}^{(1)}$ qui coïncide avec

$\hat{U}'_F/p^k$ si et seulement si la conjecture de Gross est vérifiée. Si c'est le cas, la différence $V^{(i)}/\hat{V}^{(1)} \cap V^{(i)}$ est réalisée comme un sous-groupe du noyau de l'application de capitulation modifiée $X'(F_\infty)_\Gamma \to \varinjlim X'(F_\infty)_{\Gamma_n}$.

2.1 Définition

Fixons une fois pour toutes un isomorphisme $\mathbb{Z}_p(1) \simeq \varprojlim \mu_{p^n}$. La théorie de Kummer donne alors une injection canonique à image dense $\delta : F^\times \hookrightarrow H^1(F, \mathbb{Z}_p(1))$. Lorsque F contient μ_p, on a coutume de définir le $i^{ième}$ *noyau de Tate* par

$$D^{(i)}(F) := \{x \in F^\times, \delta x \cup z = 0 \ \forall z \in H^1(F, \mathbb{Z}_p(i-1))[p]\}$$

tout du moins pour $i \neq 1$. Ici, $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i-1))[p]$ désigne le sous-groupe des éléments tués par p. $D^{(i)}(F)$ contient visiblement $F^{\times p}$ et l'on considère habituellement le $i^{ième}$ *noyau de Tate modulo* p : $D^{(i)}(F)/F^{\times p}$.

Lemme 2.2 *Avec les notations ci-dessus, il y a un isomorphisme canonique*

$$D^{(i)}(F)/F^{\times p} = H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p$$

La preuve de ce fait est standard, et repose sur une chasse dans le diagramme suivant, pour $k = 1$ et $j = 1$.

Lemme 2.3 *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. La fonctorialité du cup produit par rapport aux cobords donne lieu à un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k & \times & H^1(F, \mathbb{Z}_p(i-j))[p^k] & \xrightarrow{\cup} & H^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \\ \downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta_k^{(i-j)}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_k^{(i)}} \\ H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(j)) & \times & H^0(F, \mathbb{Z}/p^k(i-j)) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array} \tag{2}$$

où $\delta_k^{(m)}$ désigne cette fois le morphisme de Bockstein, i.e. le cobord associé à la suite exacte $\mathbb{Z}_p(m) \to \mathbb{Z}_p(m) \to \mathbb{Z}/p^k(m)$. De même en remplaçant G_F par $G_{S,F}$.

Preuve : La fonctorialité du cup produit par rapport aux cobords donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F,\mathbb{Z}_p(j)) & \times & H^1(F,\mathbb{Z}_p(i-j)) & \xrightarrow{\cup} & H^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) \\ \downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta_k^{(i-j)}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_k^{(i)}} \\ H^1(F,\mathbb{Z}_p(j)) & \times & H^0(F,\mathbb{Z}/p^k(i-j)) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array} \tag{3}$$

Celui de l'énoncé s'en déduit immédiatement.

□

Comme nous le verrons plus loin, un examen attentif de ce même diagramme donne une réponse directe à la question 2.1. Mais d'abord, le lemme 2.2 suggère la définition plus générale suivante.

Définition 2.4 *Soit F un corps de nombres quelconque (ne contenant pas nécessairement μ_p). On note $V^{(i)}(F,p^k)$ l'image du morphisme naturel*

$$H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \to H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i))$$

On l'appelle le $i^{ième}$ noyau de Tate modulo p^k.

Remarque 2.5 *Excepté si $i=1$, remplacer $G_{S,F}$ par G_F dans la définition ci-dessus ne change rien.*

Remarque 2.6 *Comme le diagramme à lignes exactes suivant commute,*

$$\begin{array}{ccccc} H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^{k+1}} & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^{k+1}(i)) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^k} & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

la dernière flèche verticale permet d'identifier naturellement $V^{(i)}(F,p^k)$ avec $V^{(i)}(F,p^{k+1})/p^k$.

2.2 Comparaison

Dans toute cette section, on fixe deux entiers $i, j \in \mathbb{Z}$ vérifiant $i \equiv j \, mod \, [F(\mu_{p^k}) : F]$ (on suppose toujours $k \geq 1$). On a alors $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) = H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$, si bien qu'il y a un sens à comparer les sous-groupes que sont le $i^{\text{ième}}$ et le $j^{\text{ième}}$ noyau de Tate modulo p^k. Si M est un module galoisien, on notera $M(i)$ ou $M \otimes \mathbb{Z}_p(i)$ son $i^{\text{ième}}$ tordu à la Tate, selon le contexte.

Théorème 2.7 *Soit $\Delta_{i,j} \subset H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(j))$ l'image, par la corestriction, de $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma(j-i)$ vu comme sous-groupe de $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(j))$. Si t est l'entier maximal vérifiant $i \equiv j \, mod \, [F(\mu_{p^{k+t}}) : F]$, alors on a un isomorphisme naturel*

$$V^{(i)}(F, p^k)/V^{(j)}(F, p^k) \cap V^{(i)}(F, p^k) \simeq p^t \Delta_{i,j}$$

Preuve : On suppose $i \neq j$, sans quoi il n'y a rien à dire. Notons $\overline{1}$ le générateur canonique de $H^0_S(F, \mathbb{Z}/p^k(j-i)) = \mathbb{Z}/p^k(j-i)$. En reprenant les notations du lemme 2.3 (où i et j sont intervertis), on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} V^{(i)}(F, p^k) & \xrightarrow{\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})} & H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) \\ {\scriptstyle nat\otimes\overline{1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \otimes \mathbb{Z}/p^k(j-i) & \xrightarrow{\delta_k^{(j)}} & H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) \end{array}$$

où *nat* désigne l'inclusion naturelle $V^{(i)}(F, p^k) \to H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$, et *id* l'identité. Maintenant $Ker \, \delta_k^{(j)} = V^{(j)}(F, p^k)$, si bien que le que $Ker \, (\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})) = V^{(j)}(F, p^k) \cap V^{(i)}(F, p^k)$. Oubliant l'indice (F, p^k) pour alléger l'écriture, on obtient un isomorphisme

$$V^{(i)}/V^{(j)} \cap V^{(i)} \xrightarrow{\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup (\delta_k^{(j-i)}\overline{1})$$

Pour conclure, nous allons utiliser la proposition 1.3 afin d'identifier le second membre. D'abord, il faut noter que l'inflation de Γ à G_S permet d'identifier

$H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p(j-i))$ au sous groupe de torsion de $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j-i))$. De cette façon, on regarde $\delta_k^{(j-i)}\overline{1}$ comme un élément de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p(j-i))$. En fait, il est facile de voir que $\delta_k^{(j-i)}\overline{1}$ engendre $p^t H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p(j-i))$. Comme $cd_p\Gamma = 1$, la corestriction $cor_F^{F_\infty} : \varprojlim H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p(j-i)) \to H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p(j-i))$ est surjective, et l'on peut donc choisir un élément $\alpha^{(j-i)} \in \varprojlim H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p(j-i))$ tel que $cor_F^{F_\infty} p^t \alpha^{(j-i)} = \delta_k^{(j-i)}\overline{1}$. Mais alors, $\alpha^{(j-i)} = \alpha \otimes 1 \in \varprojlim H^1(\Gamma_n \mathbb{Z}_p(j-i)) = \varprojlim H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Z}_p(j-i)$, pour un certain générateur α de $\varprojlim H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p)$. Observant maintenant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{id\otimes 1} & H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(j)) & \xrightarrow{cor_F^{F_\infty}} & H^2(F, \mathbb{Z}_p(j)) \\
{\scriptstyle (\cup p^t\alpha)}\uparrow & & {\scriptstyle \cup p^t\alpha^{(j-i)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})} \\
\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \xleftarrow{id} & \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \xleftarrow{res_F^{F_\infty}} & H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

on voit que

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup (\delta_k^{(j-i)}\overline{1}) = p^t cor_F^{F_\infty}(((res_F^{F_\infty} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))) \cup \alpha)(j-i))$$

D'où le résultat, puisque $res_F^{F_\infty} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))) \cup \alpha = H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$, d'après 1.3.

□

Avant d'aller plus loin, relevons les faits suivants :

Lemme 2.8 *Notons r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de F, et $\epsilon_i = rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Alors :*
(i) $rg_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) - rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = r_2$ si i est pair non nul, $r_2 + 1$ si $i = 0$, et $r_1 + r_2$ sinon.
(ii) Si $j \equiv i\, mod[F(\mu_{p^k}) : F]$, alors $\frac{o(V^{(i)}(F,p^k))}{o(V^{(j)}(F,p^k))} = p^{k(\epsilon_i - \epsilon_j)}$.
(iii) Si $\epsilon_i = \epsilon_j$, alors les groupes $\Delta_{i,j}$ et $\Delta_{j,i}$ sont abstraitement isomorphes.

Preuve : (i) Il s'agit d'un fait bien connu. On peut par exemple l'obtenir en remarquant que le quotient $\frac{o(H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^n)}{o(H^0_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^n).o(H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^n)}$ est équivalent à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G_S, \mathbb{Z}/p^n(i))$, lorsque n tend vers l'infini.

(ii) Supposons d'abord que $i, j \neq 0$. De deux choses l'une : soit $[F(\mu_{p^k}) : F]$ et pair, soit $r_1 = 0$. Dans les deux cas (i) montre que

$$rg_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) - rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = rg_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) - rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(j))$$

D'où l'on déduit que $\frac{o((f_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)))/p^k)}{o((f_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)))/p^k)} = p^{\epsilon_i - \epsilon_j}$. Maintenant, $V^{(i)}(F, p^k)$ se décompose en une somme directe $(t_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)))/p^k \oplus (f_{\mathbb{Z}_p} H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)))/p^k$, et de même pour $V^{(j)}(F, p^k)$. Mais l'ordre du premier facteur ne change pas lorsqu'on remplace i par j, à cause de la congruence de l'énoncé. Le cas $i = 0$, $j \neq 0$ se traite de façon analogue.

(iii) Notons k_{max} l'entier maximal vérifiant $i \equiv j \, mod \, [F(\mu_{p^{k_{max}}}) : F]$. Soit $k \leq k_{max}$, et $t = k_{max} - k$. D'après le point précédent, l'ordre de $V^{(i)}(F, p^k)/V^{(i)}(F, p^k) \cap V^{(i)}(F, p^k)$ ne change pas lorsqu'on intervertit i et j. Appliquant 2.7, on obtient $o(p^t \Delta_{i,j}) = o(p^t \Delta_{j,i})$. Comme ceci est valable pour tout $t < k_{max}$ et que $p^{k_{max}} \Delta_{i,j} = p^{k_{max}} \Delta_{j,i} = 0$ (car $\Delta_{i,j}$ est un quotient de $V^{(i)}(F, p^{k_{max}})$), c'est que la structure des groupes $\Delta_{i,j}$ et $\Delta_{j,i}$ est la même.

□

On en déduit immédiatement la réponse à la question 2.1 :

Corollaire 2.9 *Soient i, j, k, t comme dans 2.7. Si $p^{\delta_{i,j}}$ désigne l'exposant de $\Delta_{i,j}$, alors*

$$V^{(i)}(F, p^k) = V^{(j)}(F, p^k) \Leftrightarrow \epsilon_i = \epsilon_j \text{ et } t \geq \delta_{i,j}$$

□

Concrètement, on peut majorer $\Delta_{i,j}$ de la façon suivante :

Lemme 2.10 *Soient i, j, k, t comme dans 2.7, et notons $\epsilon_i := rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. Alors*
(i) $o(p^t \Delta_{i,j}) \leq p^{\epsilon_i k} . o(p^t cap^{(j)}(F_\infty/F))$.
(ii) Si i est bon, alors l'exposant et l'ordre de $\Delta_{i,j}$ sont majorés par ceux du sous-module fini maximal de $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$.

Preuve : (i) On dévisse l'image de l'application

$$p^t cor_F^{F_\infty} : H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma (j - i) \to H^2(F, \mathbb{Z}_p(j))$$

suivant la suite exacte tautologique

$$t_{\mathbb{Z}_p} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \quad \hookrightarrow \quad H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \quad \twoheadrightarrow \quad f_{\mathbb{Z}_p} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$$

D'abord, un raisonnement classique en théorie d'Iwasawa montre que l'image de $t_{\mathbb{Z}_p} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma(j-i)$ est un sous-groupe de $p^t cap^{(j)}(F_\infty/F)$. On note ensuite que le quotient

$$p^t cor_F^{F_\infty} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma(j-i)/p^t cor_F^{F_\infty} t_{\mathbb{Z}_p} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma(j-i)$$

est un groupe abélien fini d'exposant divisant p^k, et engendré par $\epsilon_i = rg_{\mathbb{Z}_p} H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ éléments. On majore brutalement son ordre par $(p^k)^{\epsilon_i}$ pour obtenir (i).

(ii) On note simplement que pour i bon, $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ est fini.

□

Remarque 2.11 *Le lemme précédent montre que le cas $k = 1$ du corollaire 2.9 contient et précise les résultats de [3], [1] et [4] concernant la comparaison des noyaux de Tate. Pour k quelconque, ce corollaire contient aussi le critère asymptotique de [15], obtenu précédemment en généralisant la méthode de Greenberg.*

En vue de la stratégie annoncée dans l'introduction, qui consiste à se ramener aux twists $i = 0$ ou $i = 1$, nous devons étudier le cas où i est mauvais (typiquement, $i = 1$ lorsque $\#S_p > 1$). Notons $\mathbb{Z}^b$ l'ensemble des bons twists, et $\mathbb{Z}^m$ son complémentaire. Il est facile de montrer que $\mathbb{Z}^m$ est fini (cf par exemple [14]). D'après le corollaire 2.9, on a $V^{(i)}(F, p^k) = V^{(j)}(F, p^k)$ dès que $i, j \in \mathbb{Z}^b$ sont suffisamment proches (i.e. si t est suffisamment grand). En termes vagues, l'application $i \mapsto V^{(i)}(F, p^k)$ est localement constante (pour la topologie appropriée) sur $\mathbb{Z}^b$, et $\mathbb{Z}^m$ est l'ensemble des points de discontinuité. Il semble assez naturel de modifier $V^{(i)}(F, p^k)$ "par continuité" aux mauvais twists. Cela donne :

Définition 2.12 *Soit $i \in \mathbb{Z}$. Si i est bon, on pose $\hat{V}^{(i)}(F, p^k) = V^{(i)}(F, p^k)$. Si i est mauvais, on pose $\hat{V}^{(i)}(F, p^k) = V^{(j)}(F, p^k)$, pour n'importe quel bon j vérifiant $j \equiv i \, mod[F(\mu_{p^{k+h}}) : F]$, où p^h désigne l'exposant du sous-module fini maximal de $H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$.*

On appelle $\hat{V}^{(i)}(F, p^k)$ le $i^{ième}$ noyau de Tate modulo p^k modifié.

Remarque 2.13 *Le $D^{(1)}(F)/F^{\times p}$ de [4] coïncide avec notre $\hat{V}^{(1)}(F,p)$.*

On notera que les noyaux de Tate modifiés ne dépendent pas de S. Le lemme suivant donne une description plus explicite de $\hat{V}^{(i)}(F,p^k)$

Lemme 2.14 *Soit $m_\alpha = (\cup\alpha)\circ res_F^{F_\infty} : H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$ l'application de la proposition 1.3. Si l'on note*

$$\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) := m_\alpha^{-1}(t_{\mathbb{Z}_p}H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$$

alors on a $\hat{V}^{(i)}(F,\mathbb{Z}_p(i)) = \hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k$.

Preuve : D'abord, on remarque que

$$rg_{\mathbb{Z}_p}(H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))) = \epsilon_i \tag{4}$$

En effet,

$$rg_{\mathbb{Z}_p}(H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))) = rg_{\mathbb{Z}_p}m_\alpha H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

par définition de $\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$. Mais $m_\alpha H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) = H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ (cf 1.3), il possède donc le même $\mathbb{Z}_p$-rang que $H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))_\Gamma = H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$, c'est-à-dire ϵ_i. De (4), on déduit que $o(V^{(i)}(F,p^k)/(\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k)) = p^{\epsilon_i}$. Fixons maintenant j comme dans 2.12, de sorte que $\hat{V}^{(i)}(F,p^k) = V^{(j)}(F,p^k)$. Avec ce qui précède, 2.8 (ii) montre que $\hat{V}^{(i)}(F,p^k)$ et $\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k$ possèdent le même ordre. Il suffit donc de montrer une inclusion entre ces deux groupes pour terminer la preuve. Nous allons montrer que

$$\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k \subset \hat{V}^{(i)}(F,p^k) \tag{5}$$

Si t est l'entier maximal tel que $j \equiv i\, mod[F(\mu_{p^{t+k}}):F]$, p^t annule le sous-module fini maximal de $H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$ (cf. choix de j dans 2.12). A fortiori $p^t m_\alpha(\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))) = 0$. Observons alors le diagramme commutatif suivant (cf preuve de 2.7) :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^t m_\alpha} & H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma & \xrightarrow{id\otimes 1} & H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}(j)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle nat} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle cor_F^{F_\infty}} \\
V^{(i)}(F,p^k) & & \xrightarrow{\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})} & & H^2(F,\mathbb{Z}_p(j))
\end{array}$$

On voit que l'image de $\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ par la flèche notée *nat*, est dans le noyau de celle notée $\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})$. Mais $Ker\,(\cup(\delta_k^{(j-i)}\overline{1})) = V^{(i)}(F,p^k)\cap V^{(j)}(F,p^k)$, comme on l'a vu au début de la preuve de 2.7. D'où l'inclusion (5), et l'égalité de l'énoncé.

□

Remarque 2.15 *Si l'on identifie $H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(1))$ aux S-unités p-complétées $\overline{U}_F^S$ via la théorie de Kummer (i.e. via δ, cf 2.1), alors on montre facilement le fait suivant : $\hat{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(1))$ est en fait un sous-groupe de $\overline{U}'_F = \overline{U}_F^{S_p}$, et il coïncide avec $\hat{U}'_F$ (cf fin des préliminaires) si et seulement si F vérifie la conjecture de Gross.*

Définition 2.16 *Soit $\Lambda := \mathbb{Z}[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa, γ un générateur de Γ. Si M est Λ-module de torsion, de type fini, on note M^{reg} le sous-module formé par les éléments qui possèdent un annulateur f, tel que f soit étranger à $\gamma^{p^n}-1$ pour tout n. On dit que M est Γ-régulier si $M = M^{reg}$. On note aussi M^0 le sous-module fini maximal de M.*

On a les faits suivants :

Lemme 2.17 *(i) $(M/M^{reg})^{reg} = 0$. En particulier, $(M/M^{reg})^0 = 0$.*
(ii) Pour $i \neq 0$, $(M/M^{reg})(i)$ est régulier.
(iii) Pour $i \neq 0$, l'application naturelle $M^{reg}(i)_\Gamma \to M(i)_\Gamma$ est injective.

□

Nous pouvons maintenant énoncer un analogue modifié du théorème de comparaison.

Théorème 2.18 *Soit $\hat{\Delta}_{i,j} \subset (H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(j))^{reg})_\Gamma$ l'image du sous-groupe $(H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))^{reg})^\Gamma(j-i)$ de $H^2_{Iw,S}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(j))$ par l'application naturelle de co-descente. Si t est l'entier maximal vérifiant $i \equiv j\, mod\,[F(\mu_{p^{k+t}}):F]$, alors on a un isomorphisme naturel*

$$\hat{V}^{(i)}(F,p^k)/\hat{V}^{(j)}(F,p^k)\cap\hat{V}^{(i)}(F,p^k) \simeq p^t\hat{\Delta}_{i,j}$$

Idée de la preuve : on se ramène au cas ou i est j sont bons, grâce au lemme précédent.

□

Remarque 2.19 *On notera que $\hat{\Delta}_{i,j}$ est un sous-groupe de $câp^{(j)}(F_\infty/F)$, où $câp^{(j)}(F_\infty/F)$ désigne le noyau de l'application de capitulation modifiée*

$$(H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(j))^{reg})_\Gamma \to \varinjlim (H^2_{Iw,S}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(j))^{reg})_{\Gamma_n}$$

Bien sûr, si j est bon, $câp^{(j)}(F_\infty/F) = cap^{(j)}(F_\infty/F)$. Maintenant, si $j = 1$ et $S = S_p \cup S_\infty$, on notera que $H^2_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))^{reg} \subseteq X'(F_\infty)$, avec égalité si et seulement si la conjecture de Gross est vraie à tous les étages de la tour cyclotomique.

2.3 Une définition alternative

Nous avons déjà remarqué que lorsque $D^{(i)}(F) \subset F^\times$ est défini (i.e. lorsque $\mu_p \subset F, i \neq 1$), notre noyau de Tate modulo p, noté $V^{(i)}(F,p)$ coïncide avec $D^{(i)}(F)/F^{\times p}$. Il serait souhaitable d'avoir un sous-groupe de $F^\times$ (ou plutôt de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(1))$), disons $V^{(i)}(F)$ qui vérifie $V^{(i)}(F)/V^{(i)}(F) \cap F^{\times p^k} = V^{(i)}(F, p^k)$ (ou peut-être $\hat{V}^{(i)}(F, p^k)$?) dès que cela a un sens, i.e. dès que $i \equiv 1 \, mod [F(\mu_{p^k}) : F]$.

Définition 2.20 *Considérons le cup produit suivant :*

$$H^1(F, \mathbb{Z}_p(1)) \times H^1(F, \mathbb{Z}_p(i-1)) \xrightarrow{\cup} H^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

On définit le $i^{ième}$ noyau de Tate fin $V^{(i)}(F) \subset H^1(F, \mathbb{Z}_p(1))$ par

$$V^{(i)}(F) = H^1(F(\mu_{p^\infty})/F, \mathbb{Z}_p(i-1))^\perp$$

où $H^1(F(\mu_{p^\infty})/F, \mathbb{Z}_p(i-1))$ est vu comme un sous-groupe de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i-1))$ par inflation, et $(-)^\perp$ désigne l'orthogonal pour l'accouplement ci-dessus.

Proposition 2.21 *On suppose que i est bon, ou que $i = 1$ et que F vérifie la conjecture de Gross. Si $k \geq 0$ est tel que $i \equiv 1 \, mod [F(\mu_{p^k}) : F]$, alors $\hat{V}^{(i)}(F, p^k)$ vu comme sous-groupe de $H^1(F, \mu_{p^k})$, coïncide avec l'image de $V^{(i)}(F)$ dans $H^1(F, \mu_{p^k})$.*

Idée de la preuve : on distingue les cas $i = 1$ et $i \neq 1$, et on utilise le lemme 2.3.

En s'inspirant du lemme 2.14, on pourrait définir des noyaux de Tate fins modifiés, qui coïncideraient avec les $V^{(i)}$ aux bons i, et en $i = 1$ si et seulement si la conjecture de Gross est vraie.

3 Bornes pour les noyaux de capitulation

Fixons une extension abélienne E/F de groupe de Galois $G = G(E/F)$. A partir de maintenant, S est un ensemble fini de places de F, contenant les places p-adiques et archimédiennes, ainsi que celles qui se ramifient dans E/F. On note $cap^{(i)}(E/F)$ (resp. $cocap^{(i)}(E/F)$) le noyau (resp. conoyau) de l'application de capitulation - cohomologiquement, c'est la restriction : $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G$. Suivant [1], on cherche à produire des bornes inférieures pour l'ordre de $cap^{(i)}(E/F)$. La motivation de la présente étude est le cas $S = S_p \cup S_\infty$, où les bornes de [1] sont triviales. Nous proposons deux approches différentes, qui donnent des résultats complémentaires. Dans les deux, on cherche à se ramener aux twists $i = 0$ ou $i = 1$, en utilisant les résultats de la section précédente.

3.1 Minoration globale

Dans cette section, E/F est une extension S-ramifiée abélienne de groupe G, d'exposant divisant p^k. Pour obtenir une minoration globale, on se ramène au cas $i = 0$. Grossièrement, l'idée est la suivante : l'extension E/F correspond à un sous-groupe de $H^1(G, \mathbb{Z}/p^k) \subset H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k)$ dont l'image par le morphisme de Bockstein :

$$\delta_k^{(0)} : H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p)$$

est un sous-groupe de $cap^{(0)}(E/F)$. Comme $Ker\, \delta_k^{(0)} = V^{(0)}(F, p^k)$, la comparaison entre les différents noyaux de Tate modulo p^k effectuée plus haut permet de contrôler l'ordre d'un sous-groupe de $cap^{(i)}(E/F)$ analogue, lorsque i est suffisamment proche de 0. Ce changement de twist fait apparaître le défaut $\Delta_{i,0}$ du théorème 2.7, dont nous savons borner l'ordre (cf lemme. 2.10).

Comme d'habitude, F_∞/F et $\tilde{F}/F$ désignent respectivement la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique et la $\mathbb{Z}_p$-extension multiple maximale (ie. composée de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F). On note aussi $F_S^{ab}(p)/F$ la pro-p-extension S-ramifiée abélienne maximale et $\mathcal{X}_S(F)$ son groupe de Galois.

Théorème 3.1 *Soit E/F une p-extension abélienne, non ramifiée hors S. Si $i \equiv 0\, mod [F(\mu_{p^{k+t}}) : F]$, avec $G(E/F)^{p^k} = 1$, alors*

$$cap^{(i)}(E/F) \geq \frac{[E : E \cap \tilde{F}]}{o(p^t \Delta_{i,0})} \geq \frac{[E : E \cap \tilde{F}]}{p^{\epsilon_i k}.o(p^t\, cap^{(0)}(E/F))}$$

où ϵ_i désigne le $\mathbb{Z}_p$-rang de $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$.

Preuve : Ecrivons la cohomologie de la suite exacte $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^k$. On obtient deux suites exactes compatibles, où l'on numérote les flèches de restriction, pour les besoins de la suite :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V^{(0)}(F,p^k) & \to & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k) & \stackrel{\delta_k^{(0)}}{\to} & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p)[p^k] & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle res_1^{(0)}} & & \downarrow{\scriptstyle res_2^{(0)}} & & \downarrow{\scriptstyle res_3^{(0)}} & & \\ 0 & \to & V^{(0)}(E,p^k) & \to & H^1_S(E,\mathbb{Z}/p^k) & \to & H^2_S(E,\mathbb{Z}_p)[p^k] & \to & 0 \end{array} \tag{6}$$

De même, la suite exacte $\mathbb{Z}_p(i) \to \mathbb{Z}_p(i) \to \mathbb{Z}/p^k(i)$, donne

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V^{(i)}(F,p^k) & \to & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) & \stackrel{\delta_k^{(i)}}{\to} & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))[p^k] & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle res_1^{(i)}} & & \downarrow{\scriptstyle res_2^{(i)}} & & \downarrow{\scriptstyle res_3^{(i)}} & & \\ 0 & \to & V^{(i)}(E,p^k) & \to & H^1_S(E,\mathbb{Z}/p^k(i)) & \to & H^2_S(E,\mathbb{Z}_p(i))[p^k] & \to & 0 \end{array} \tag{7}$$

Comme $i \equiv 0\, mod[F(\mu_{p^k}) : F]$, les termes centraux de ces deux diagrammes sont identiques, si bien que $Ker\, res_2^{(i)} = Ker\, res_2^{(0)}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} o(Ker\, res_1^{(i)}) &\leq o(Ker\, (V^{(i)}(F,p^k) + V^{(0)}(F,p^k) \to H^1_S(E,\mathbb{Z}/p^k(i))) \\ &\leq o(Ker\, res_1^{(0)}).o(V^{(i)}(F,p^k) + V^{(0)}(F,p^k)/V^{(0)}(F,p^k)) \end{aligned}$$

Mais d'après 2.7, on a

$$\begin{aligned} V^{(i)}(F,p^k) + V^{(0)}(F,p^k)/V^{(0)}(F,p^k) &= V^{(i)}(F,p^k)/V^{(i)}(F,p^k) \cap V^{(0)}(F,p^k) \\ &\simeq p^t \Delta_{i,0} \end{aligned}$$

On écrit donc

$$o(Ker\, res_3^{(i)}) \geq \frac{o(Ker\, res_2^{(i)})}{o(Ker\, res_1^{(i)})} \geq \frac{o(Ker\, res_2^{(0)})}{o(p^t \Delta_{i,0}).o(Ker\, res_1^{(0)})}$$

et cela donne la première inégalité de l'énoncé, compte tenu de

$$o(Ker\, res_1^{(0)}) = [E \cap \tilde{F} : F] \text{ et } o(Ker\, res_2^{(0)}) = [E : F]$$

Pour obtenir la seconde, on utilise le lemme 2.10.

□

Supposons que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p, alors $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p)$ est fini. Notons p^k son exposant, et T la p^k-extension abélienne élémentaire S-ramifiée maximale de F. Si $i \equiv 1\, mod\, [F(\mu_{p^{k+1}}) : F]$, il suffit d'observer que les flèches $\delta_k^{(0)}$ et $\delta_k^{(i)}$ des diagrammes (6) et (7) sont surjectives pour voir que $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))[p^k] = H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule dans T, comme annoncé dans l'introduction. Le résultat précédent montre que la capitulation ainsi observée a lieu dès T', pour n'importe quelle sous-extension T'/F de T/F vérifiant $T'\tilde{F} = F_S^{ab}(p)$.

Lorsque i ne vérifie pas la congruence demandée, il n'existe pas en général de p-extension S-ramifiée abélienne finie dans laquelle $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule. Par exemple, une telle extension n'existe pas pour $F = \mathbb{Q}$, i pair et $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0$. Dans certains cas, on peut tout de même utiliser la minoration 3.1 pour obtenir des résultats plus faibles, mais indépendant de i. Par exemple :

Corollaire 3.2 *Soit $F \supset \mu_p$ tel que $H^2_S(F, \mathbb{Z}/p) \neq 0$. On suppose que $X'(F_\infty)$ ne possède aucun sous-module fini non nul. Si E/F est une p-extension abélienne S-ramifiée linéairement disjointe de $\tilde{F}/F$, alors $cap^{(i)}(E/F) \neq 0$, pour tout bon i.*

□

Notons que pour $i = 1$, on parle bien de $cap^{(1)}(E/F)$, et non de $\hat{cap}^{(1)}(E/F)$ (cf 2.19). Cela tient au fait que l'on a utilisé $V^{(i)}$ et non $\hat{V}^{(i)}$.

3.2 Minoration locale

Dans cette section, E/F est une extension S-ramifiée, cyclique d'ordre p^k, de groupe G. On souhaite ici minorer l'ordre de $cap^{(i)}(F)$ en utilisant la théorie du corps de classes local. L'approche proposée par [1] repose sur l'observation suivante : si i est E-bon (i.e. si $H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$ est fini), les groupes $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))_G$ et $H^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G$ ont le même ordre, puisque G est cyclique. On a alors automatiquement aussi $o(cap^{(i)}(E/F)) = o(cocap^{(i)}(E/F))$, et il reste à minorer le conoyau de capitulation. Le gain tient au fait que celui-ci se "localise mieux". Il faut noter que les minorations que nous obtenons ici sont complémentaires de celles du paragraphe précédent ; elles permettront notamment d'obtenir un exemple de borne non triviale pour certaines extensions $\mathbb{Z}_p$-plongeables.

Le point de départ est le suivant :

Proposition 3.3 *Soit $i \neq 0$, et supposons i E-bon. Fixons un générateur a de $H^1(G, \mathbb{Z}/p^k) \subset H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k)$, et considérons le cup produit suivant*

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \times H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k) \stackrel{\cup}{\to} H^2_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$$

Alors $o(cap^{(i)}(E/F)) \geq o(H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a)$.

Preuve : Si $x = cor^E_F y$, avec $y \in H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$, on a

$$x \cup a = (cor^E_F y) \cup a = cor^E_F(y \cup res^E_F a) = 0$$

puisque $res^E_F a = 0$. Ainsi, l'application $\cup a : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ se factorise par $\hat{H}^0(G, H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$. On a donc $o(\hat{H}^0(G, H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))) \geq o(H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a)$. Mais G est cyclique, si bien que $\hat{H}^0(G, H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$ est isomorphe à $H^2(G, H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$, lequel s'identifie à $cocap^{(i)}(E/F)$, via la différentielle $d^{0,2}_2$ de la suite spectrale d'inflation-restriction

$$E^{p,q}_2 = H^p(G, H^q_S(E, \mathbb{Z}_p(i))) \Rightarrow H^{p+q}(F, \mathbb{Z}_p(i)) = E^{p+q}$$

(la surjectivité de $d^{0,2}_2$ tient à $cd_p G_S \leq 2$ et $H^0_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) = 0$)

□

Remarque 3.4 *Si k suffisamment grand, $H^2_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) = H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. En faisant cette identification, on obtient une application $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$, induite par le cup produit avec a. En général, il n'y a pas de raison pour que l'image de celle-ci soit dans $cap^{(i)}(E/F)$. Noter le contraste avec la situation étudiée dans [13].*

Si F'/F est une extension abélienne, on note $(\frac{-}{F'_v/F_v})$ le symbole d'Artin, à image dans $G(F'_v/F_v)$, et $(\frac{-}{F'/F})_v$ son image dans $G(F'/F)$. On note aussi loc_v l'application de localisation en v et $loc_S = \oplus_{v\in S} loc_v : H^q_S(F,-) \to \oplus_v H^q(F_v,-)$.

Théorème 3.5 *On suppose que i est E-bon, et que $i \equiv 1\, mod\, [F(\mu_{p^{k+t}}) : F]$.*
(i) Si F vérifie la conjecture de Gross, alors $o(cap^{(i)}(E/F)).o(p^t\hat{\Delta}_{1,i})$ (et a fortiori $o(cap^{(i)}(E/F)).o(cap^{(i)}(p^tF_\infty/F))$) est minoré par l'ordre de l'image de l'application

$$\oplus(\frac{-}{E_v/F_v}) : \hat{U}'_F \to \underset{v\in S}{\oplus} G(E_v/F_v)$$

(ii) Si F contient μ_{p^k}, on note $F^{(i)}_k/F$ l'extension correspondant à $V^{(i)}(F,p^k) \subset H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(1))$ par la théorie de Kummer, et l'on choisit $x \in F$ tel que $E = F(\sqrt[p^k]{x})$. Alors $o(cap^{(i)}(E/F))$ est minoré par l'ordre du sous-groupe de $G(F^{(i)}_k/F)$ engendré par les éléments $(\frac{x}{F^{(i)}_k/F})_v$.

Preuve : Comme le suggère la proposition 3.3, nous allons minorer l'ordre de $H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \cup a$. Pour cela, on procède par localisation, i.e. on évalue l'ordre de l'image de l'application composée suivante :

$$H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \overset{\cup a}{\to} H^2_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \overset{loc_S}{\to} \oplus_{v\in S}\, H^2_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \qquad (8)$$

On note $a_v = loc_v a$. C'est un générateur de $H^1(E_v/F_v,\mathbb{Z}/p^k) \subset H^1(F_v,\mathbb{Z}/p^k)$.

(i) Puisque $i \equiv 1\, mod\, [F(\mu_{p^k}) : F]$, on peut changer i en 1 dans les deux derniers termes de (8). L'image en question s'identifie donc à celle de $V^{(i)}(F,p^k)$ par la seconde flèche horizontale de la première ligne, dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
F^\times/F^{\times p^k} & \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} & H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(1)) & \xrightarrow{\oplus \cup a_v} & \underset{v\in S}{\oplus} H^2(F_v,\mathbb{Z}/p^k(1)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \oplus(\frac{-}{E_v/F_v})} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \oplus inv_v} \\
\underset{v\in S}{\oplus} G(E_v/F_v) & & \xrightarrow{\oplus a_v} & & \underset{v\in S}{\oplus} \mathbb{Z}/p^k
\end{array}$$

Mais le diagramme ci-dessus est commutatif ([10], XIV, prop. 5) et la flèche horizontale inférieure est injective, donc l'image de (8) s'identifie à celle de $V^{(i)}(F,p^k)$ par

$$\phi := \oplus(\frac{-}{E_v/F_v}) \circ \delta^{-1} : H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(1)) \to \underset{v\in S}{\oplus} G(E_v/F_v) \tag{9}$$

Maintenant, on a

$$o(\phi(V^{(i)}(F,p^k))) \geq o(\phi(V^{(i)}(F,p^k) \cap \hat{V}^{(1)}(F,p^k))) \geq \frac{o(\phi(\hat{V}^{(1)}(F,p^k)))}{o(p^t\hat{\Delta}_{1,i})}$$

et cela donne la minoration de l'énoncé, puisque sous la conjecture de Gross, on a $\hat{U}'_F/p^k = \delta^{-1}(\hat{V}^{(1)}(F,p^k))$.

(ii) Comme en (i), on cherche à déterminer l'ordre de l'image de la flèche

$$\oplus(\frac{-}{E_v/F_v}) : \delta^{-1}(V^{(i)}(F,p^k)) \to \underset{v\in S}{\oplus} G(E_v/F_v)$$

Lui appliquant le foncteur $Hom(-,\mu_{p^k})$, on obtient via la théorie de Kummer la flèche suivante :

$$\underset{v\in S}{\oplus} E_v^{\times p^k} \cap F_v^\times/F_v^{\times p^k} \to G(F_k^{(i)}/F)$$

dont on vérifie qu'elle est induite par le produit des applications de réciprocité locales. D'où la minoration annoncée.

□

Remarque 3.6 *Plaçons-nous dans le cadre de [1], i.e. $k=1$, $F \subset \mu_p$ et $V^{(i)}(F,p) = V^{(0)}(F,p)$. Pour obtenir la minoration du th. 3.7 (loc. cit.), il suffit de négliger la contribution des places p-adiques dans la minoration (ii) ci-dessus, et d'expliciter le symbole $(\frac{x}{F_1^{(i)}/F})_v$ aux places modérées.*

Pour chaque place de F, on note $d_v(E/F)$ (resp. $e_v(E/F)$, $f_v(E/F)$) le degré de l'extension locale E_v/F_v (resp. l'indice d'inertie de v dans E/F, le degré de l'extension résiduelle $k_v(E)/k_v(F)$).

Corollaire 3.7 *On suppose que F vérifie la conjecture de Gross. Si i est E-bon, et vérifie $i \equiv 1 \, mod[F(\mu_{p^{k+t}}) : F]$ avec $p^t cap^{(i)}(F_\infty/F) = 0$, alors $o(cap^{(i)}(E/F))$ est minoré par l'ordre de l'image de l'application*

$$\oplus \phi_v : \hat{U}_F \to \oplus_{v \in S - S_p} k_v(F)^\times \oplus_{v \in S_p} \mathbb{Z}/d_v(E/F)$$

où ϕ_v est définie par l'élévation à la puissance $f_v(E/F)$ suivie de la réduction modulo v, si $v \in S - S_p$; ou par l'élévation à la puissance $e_v(E/F)$ suivie de la valuation v réduite modulo $d_v(E/F)$, si $v \in S_p$.

Preuve : On utilise le point (i) du théorème précédent, et l'on minore l'image de

$$\oplus(\frac{-}{E_v/F_v}) : \hat{U}'_F \to \underset{v \in S}{\oplus} G(E_v/F_v)$$

par celle de

$$\oplus(\frac{-}{E_v/F_v}) : \hat{U}'_F \to \underset{v \in S}{\oplus} G(E_v^0/F_v)$$

où $E_v^0 = E_v$ si $v \in S - S_p$, et E_v^0/F_v est la sous-extension non ramifiée maximale de E_v/F_v si $v \in S_p$. Il suffit alors d'expliciter les applications de réciprocité locales dans E_v^0/F_v, (symboles modérés et sauvages).

□

Le cas $S = S_p$

Comme annoncé dans l'introduction, on montre ici comment exploiter le théorème 3.5 dans le cas où E/F est une extension S-ramifiée, cyclique de degré p^k, avec $S = S_p \cup S_\infty$. On souhaite en particulier produire des exemples où E/F est $\mathbb{Z}_p$-plongeable et $cap^{(i)}(E/F) \neq 0$. C'est de loin le cas le plus difficile, mais c'est aussi le plus intéressant, à cause de son lien avec la conjecture de Greenberg généralisée (on renvoie à [8] et [13] pour plus d'explications).

Proposition 3.8 *On suppose que i est E-bon, $i \equiv 1 \, mod[F(\mu_{p^{k+t}}) : F]$.*
(i) Si F vérifie la conjecture de Gross, alors $\forall v \in S_p$, on a

$$\frac{[k_v(E) : k_v(F)]}{u_v} \mid o(cap^{(i)}(E/F)).o(p^t cap^{(i)}(F_\infty/F))$$

où $u_v \mathbb{Z}_p = v(\hat{U}'_F)$ (noter que $v(\hat{U}'_F) \neq 0$, puisque $p \in \hat{U}'_F$).

(ii) On suppose que $\mu_{p^k} \subset F$ *et l'on choisit* x *tel que* $E = F(\sqrt[p^k]{x})$*. Si* F *vérifie la conjecture de Leopoldt, alors* $\forall v \in S_p$*, on a*

$$\frac{[k_v(F_k^{(0)}) : k_v(F)]}{v(x)} \mid o(cap^{(i)}(E/F)).o(p^{t'} cap^{(i)}(F_\infty/F))$$

où t' *est l'entier maximal vérifiant* $i \equiv 0 \, mod \, [F(\mu_{p^k}) : F]$*.*

Preuve : (i) est une conséquence directe du corollaire 3.7, en minorant $o(Im \oplus \phi_v)$ par $max(o(Im\, \phi_v))$. Pour obtenir (ii), on utilise 3.5 (ii). Le changement de twist de i à 0 fait apparaître $p^{t'}\Delta_{0,i}$, dont on majore l'ordre par celui de $p^{t'} cap^{(i)}(F_\infty/F)$. On considère ensuite le sous-groupe de $G(F_k^{(0)}/F)$, engendré par les éléments $(\frac{x}{F_k^{(0)}/F})_v$; son ordre est évidemment minoré par celui de chacun des éléments $(\frac{x}{F_k^{(0)}/F})_v$. Ne sachant calculer ces derniers, on regarde leurs images dans la sous-extension maximale de $F_k^{(0)}/F$ qui soit non ramifiée en v, et cela donne la minoration de l'énoncé.

□

Remarque 3.9 *Alors que les minorations* (i) *et* (ii) *du théorème 3.5 sont quasiment identiques, celles des points* (i) *et* (ii) *ci-dessus en sont très loin (lorsque l'une est grande, l'autre est automatiquement petite). Cela tient au fait que le passage aux sous-extensions non-ramifiées maximales - effectué en 3.7 pour* (i)*, et ci-dessus pour* (ii) *- est bien trop brutal pour être optimal. Pour obtenir de meilleures bornes, il faudrait peut-être utiliser des formules explicites pour les symboles locaux. Nous espérons y revenir dans un travail ultérieur.*

La question 2.1 admet l'affaiblissement suivant :

Question 3.10 *A-t-on toujours* $loc_{S_p}\hat{V}^{(i)}(F, p^k) = loc_{S_p}\hat{V}^{(j)}(F, p^k)$*, lorsque* $i \equiv j \, mod \, [F(\mu_{p^k}) : F]$ *?*

Une réponse positive à cette question permettrait de faire disparaître le facteur $o(p^t cap^{(i)}(F_\infty/F))$ omniprésent dans les minorations de ce paragraphe (pour $S = S_p \cup S_\infty$).

Bien que les bornes de la proposition 3.2 ne soient pas très bonnes, elles peuvent être aussi grandes qu'on le souhaite. Par exemple :

Proposition 3.11 *On suppose que F vérifie la conjecture de Gross. Si $L = \cup L_k$ est une $\mathbb{Z}_p$-extension de F vérifiant :*

(H) F possède une p-place v, inerte dans L/L_k, pour $k >> 0$.

Alors, il existe une constante c, indépendante de i et k, telle que pour $i \geq 2$:

$$i \equiv 1 \, mod [F(\mu_{p^k}) : F] \Rightarrow o(cap^{(i)}(L_k/F)) \geq p^{k-c}$$

Preuve : On utilise la minoration (i). Notons p^{c_1} le nombre de places au-dessus de v dans L, $c_2 = v_p(v(p))$, et p^{c_3} l'exposant du sous-module fini maximal de $X'(F_\infty)$. On peut prendre $c = c_1 + c_2 + c_3$.

□

Remarque 3.12 *En fait, l'image de p dans $F^\times/F^{\times p^k}$ est un élément de $V^{(i)}(F, p^k)$, si $i \equiv 1 \, mod \, p^k$ (raisonner dans l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$). On voit donc que dans la proposition ci-dessus, l'hypothèse de Gross est superflue, et que l'on pourrait en fait prendre $c = c_1 + c_2$.*

Remarque 3.13 *En considérant $\pi_n = N_{F(\mu_p^n)/F_n}(1 - \zeta_{p^n}) \in \hat{U}'_{F_n}$ on peut adapter l'argument ci-dessus pour montrer l'existence d'une constante c, indépendante de n, telle que*

$$i \equiv 1 \, mod [F(\mu_p) : F] \Rightarrow o(cap^{(i)}(F_n L_n/F_n)) \geq p^{n-c}$$

En utilisant le lemme 4.10 de [13], on en déduit que l'existence d'une $\mathbb{Z}_p$-extension L/F vérifiant l'hypothèse (H) entraîne une réponse positive à la question 4.1 de loc. cit.

Bien sûr, si p ne se décompose pas dans F, l'hypothèse (H) n'est vérifiée par aucune $\mathbb{Z}_p$-extension de F.

Question 3.14 *A quelle condition nécessaire et suffisante F possède-t-il une $\mathbb{Z}_p$-extension L/F vérifiant l'hypothèse (H) ?*

Voici une condition suffisante :

Lemme 3.15 *Soit $F/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne dans laquelle p se décompose. Si le sous-corps de décomposition de p possède au moins une place complexe et vérifie la conjecture de Gross, alors F possède une $\mathbb{Z}_p$-extension L/F vérifiant l'hypothèse (H).*

Preuve : Comme la propriété (H) est invariante par changement de base, on peut supposer que p se décompose totalement dans F. Mais alors on a $F_v = \mathbb{Q}_p$ en toute p-place v. Soit $\tilde{F}/F$ la composée de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F et $\tilde{\Gamma} = G(\tilde{F}/F)$. Il s'agit de montrer que pour une certaine p-place v, $(\tilde{F})_v$ contient la $\mathbb{Z}_p$-extension non ramifiée ${\mathbb{Q}_p}^{nr}$ de $\mathbb{Q}_p$. Si ce n'était pas le cas, on aurait en fait $(\tilde{F})_v = {\mathbb{Q}_p}^{cyc}$, la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$. Mais alors, $X'(F_\infty)_\Gamma \twoheadrightarrow G(\tilde{F}/F_\infty)$, ce qui contredit la conjecture de Gross (laquelle postule la finitude de $X'(F_\infty)_\Gamma$).

□

Ce lemme et la remarque 3.13 fournissent une nouvelle classe de corps F vérifiant la conjecture $(GGf)^{(i)}$ de [13] pour tout $i \equiv 1\, mod[F(\mu_p) : F]$.

Remarque 3.16 *Pour 3.11 et 3.13, on a utilisé uniquement la minoration (i). On pourrait aussi utiliser la minoration (ii) pour produire d'autres exemples (du type $F_n(\sqrt[p^n]{\pi_n})/F_n$ avec $n >> 0$, lorsqu'il existe L/F comme dans la question 3.14).*

Références

[1] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for Étale Capitulation Kernels*, K-Theory, **33** (2004), 199-213.

[2] L. Federer, B.H. Gross, with an appendix by W.Sinnott, *Regulators and Iwasawa Modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443-457.

[3] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. of Math. **100**, No.6. (1978), 1235-1245.

[4] K. Hutchinson, *Tate kernels, étale K-theory and the Gross Kernel*, Preprint (2005).

[5] K. Iwasawa, *On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$-extensions*, American J. of Math., **105** (1983), 189-200.

[6] B. Kahn, *Descente Galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-Theory **7** (1993), 55-100.

[7] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000), 35-65.

[8] T. Nguyen Quang Do, D. Vauclair, *K_2 et conjectures de Greenberg dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions multiples*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **17**, No.2. (2005).

[9] P.Schneider, *Über Gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181-205.

[10] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann (1968).

[11] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[12] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[13] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulations étales et conjecture de Greenberg généralisée*, K-theory **36**, No.3 (2005), 223-244.

[14] D. Vauclair, *Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions d'un corps de nombres*, thèse, Besançon (2005).

[15] D. Vauclair, *Sur la comparaison des noyaux de Tate d'ordre supérieur*, Publications Mathématiques de Besançon (2006)

[16] D. Vauclair, *Sur les normes universelles et la structure de certains modules d'Iwasawa*, en préparation.