
SUR LA COMPARAISON DES NOYAUX DE TATE D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

David Vauclair

Résumé. — We study generalized Tate kernels attached to a number field. It is known that there is a relationship between the equality of two of them and the size of some capitulation kernel in cyclotomic Iwasawa theory. By introducing some finer “Tate kernels *mod* p^k ”, we are able to describe this relationship very precisely, and to understand its asymptotic nature.

Introduction

Soit p un nombre premier impair, et F un corps de nombres. Supposons d’abord que F contienne une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l’unité, notée ζ_p . Dans [G] (voir aussi [KC]), l’auteur fait l’étude des deux sous-groupes suivants de F^\times :

- $D^{(0)}(F)$, formé des éléments $x \in F^\times$ dont l’extension de Kummer associée $F(\sqrt[p]{x})/F$ est soit triviale soit le premier étage d’une \mathbb{Z}_p -extension.

- le noyau de Tate $D^{(2)}(F)$ formé des éléments $x \in F^\times$ pour lesquels le symbole de Steinberg $\{x, \zeta_p\} \in K_2F$ est trivial.

Sous la conjecture de Leopoldt, on sait que l’image de ces deux groupes dans $F^\times/F^{\times p}$ possède le même ordre. Aussi J. Coates avait-il posé la question suivante, rapportée dans [G] :

Question 0.1. — *Supposons la conjecture de Leopoldt vraie pour F et p . A-t-on alors $D^{(0)}(F) = D^{(2)}(F)$?*

R. Greenberg (loc. cit.) a montré que la réponse à cette question dépend de F . Si le noyau de capitulation asymptotique dans la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de F (noté $X'(F_\infty)^0$) est trivial, alors l’égalité a lieu ; cela se produit par exemple pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, sous la conjecture de Vandiver. Greenberg produit aussi une

condition explicite (qu'il vérifie pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3.257})$) sous laquelle l'égalité n'a pas lieu.

Ces résultats mettent en évidence le fait suivant : la "différence" entre $D^{(2)}$ et $D^{(0)}$ est "contrôlée" par le noyau de capitulation. Ce travail vise à préciser le sens de la phrase précédente. Pour cela, il faut considérer une situation plus générale. Soit $i \in \mathbb{Z}$ et F_n le $n^{\text{ième}}$ étage de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique F_∞/F ; on ne suppose plus $\zeta_p \in F$. Nous introduisons des noyaux de Tate généralisés $\text{mod } p^k$, notés $V_i(F_n, p^k)$. Si $\zeta_p \in F$, ils sont tels que $V_i(F_n, p) = D^{(i)}(F_n)/F_n^{\times p}$ pour $i = 0, 2$ et plus généralement pour $i \neq 1$, si l'on prend pour $D^{(i)}(F_n)$ la définition adoptée par [KM], [AM] et [H]. Le cas $i \neq 1$ demande un traitement particulier (cf [H] et [V2]), et nous l'éviterons ici.

Fixons un corps de base F . Le problème de la comparaison de $V_i(F_n, p^k)$ avec $V_j(F_n, p^k)$ a un sens dès que $i \equiv j \pmod{[F_n(\mu_{p^k}) : F_n]}$. Sous cette hypothèse, notre résultat principal (cf 2.2) met en relation les quantités suivantes :

- le nombre de racines de l'unité contenues dans F_n ; on note $m(F_n) = \max\{m, \mu_{p^m} \subset F_n(\mu_p)\}$.

- la distance p -adique entre i et j .

- on suppose que les groupes $X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} = X'(F_\infty)(i-1)^{\Gamma_n}$ et $X^{(j)}(F_\infty)^{\Gamma_n} = X'(F_\infty)(j-1)^{\Gamma_n}$ (cf notations) sont finis, i.e. que i et j sont F_n bons (cf 1.7), et l'on note $h(F_n, i, j)$ le minimum de leurs deux exposants.

- l'entier $k = k(F_n, i, j) \leq v_p(i-j) + m(F_n)$ maximal pour lequel l'égalité $V_i(F_n, p^k) = V_j(F_n, p^k)$ a lieu.

Nous montrons qu'il existe un entier explicite n_0 (dépendant de F) tel que pour $n \geq n_0$, on ait

$$k(F_n, i, j) + h(F_n, i, j) = m(F_n) + v_p(i-j)$$

Pour n quelconque, on a seulement l'inégalité $k(F, i, j) + h(F, i, j) \geq m(F) + v_p(i-j)$. Les techniques employées sont une adaptation naturelle de celles de [G] à la situation considérée ici. Naturellement, on retrouve les résultats de [G] mentionnés plus haut.

Les noyaux de Tate généralisés $\text{mod } p^k$ apparaissent naturellement lorsqu'on s'intéresse à certains problèmes de capitulation (cf par exemple [KM] ou [V1]). Dans le dernier paragraphe, nous travaillons à affaiblir l'hypothèse selon laquelle i et j doivent être F -bons. On complète ainsi la preuve du théorème 4.9 de [V1] en affaiblissant l'hypothèse de Leopoldt, ce qui rend le résultat applicable en pratique (on peut supposer Leopoldt seulement pour le corps de base, voir loc. cit. rem. 4.13)

Table des matières

Introduction	1
Notations	3
1. Définition des noyaux de Tate généralisés	4
2. Comparaison $\text{mod } p^k$	7
3. Comparaison F -rationnelle	13
Références	15

Notations

F un corps de nombres.

p un nombre premier impair.

G_F le groupe de Galois absolu de F .

$G_S = G_S(F)$ le groupe de Galois de l'extension (p) -ramifiée maximale de F .

$F_\infty = \cup F_n$ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de F .

$\Gamma = \text{Gal}(F_\infty/F)$.

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa.

$m(F) = \max\{m, \mu_{p^m} \subset F(\mu_p)\}$.

$A'(F) = \mathcal{C}l'(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ la p -partie du groupe des (p) -classes de F .

$X' = \varprojlim A'(F_n)$.

$H^q(F, \bullet)$ la cohomologie continue de G_F .

$H_S^q(F, \bullet) = H^q(G_S(F), \bullet)$ la cohomologie continue de $G_S(F)$.

$H_{Iw}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) = \varprojlim H_S^q(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$.

$X^{(i)}(F_\infty) = H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$.

$\mathcal{X}^{(-i)}(F) = H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\vee$ où \bullet^\vee désigne la dualité de Pontryagin.

$\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) = \varprojlim \mathcal{X}^{(-i)}(F_n)$.

$V_i(F, p^k) = \text{Im}(H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)))$, le $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $\text{mod } p^k$, si $i \neq 1$.

$V_i = D^{(i)}(F)/p$, voir cor. 1.5 pour $D^{(i)}(F)$ et $D^{(i)}(F, p^k)$.

$V_i(E/F, p^k) = \text{Im}(H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)))$ la partie F -rationnelle du $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $\text{mod } p^k$.

$\text{exp}(M)$ l'exposant du groupe abélien fini M .

M^{div} le sous-groupe divisible maximal du groupe abélien M .

M^0 le sous module fini maximal du Λ -module noethérien M .

$h = \text{exp}(X'(F_\infty)^0)$ l'exposant du p -groupe fini $X'(F_\infty)^0$.

$h(F, i, j) = \min(\text{exp}(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma), \text{exp}(X^{(j)}(F_\infty)^\Gamma))$.

$k(F, i, j) = \max\{k \leq m(F) + v_p(i - j), V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k)\}$.

1. Définition des noyaux de Tate généralisés

Soit F un corps de nombres et supposons momentanément qu'il contient ζ_p , une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Notons $\{.,.\}$ le symbole de Steinberg. Le noyau de Tate est habituellement défini comme le sous-groupe suivant $D^{(2)}(F)$ de F^\times :

$$D^{(2)}(F) := \{x \in F^\times, \{x, \zeta_p\} = 0\}$$

et comme il contient $F^{\times p}$, l'étude de $D^{(2)}(F)$ est strictement équivalente à celle de sa réduction $\text{mod } p$: $V_2(F, p) = D^{(2)}(F)/p \subset F^\times / F^{\times p}$ que l'on qualifera de noyau de Tate $\text{mod } p$. Nous proposons ici, pour F quelconque (ne contenant pas nécessairement μ_p) et $i \neq 1$, une définition cohomologique directe et générale des noyaux de Tate $\text{mod } p^k$. Pour F contenant μ_p et $k = 1$, nous retrouverons les groupes $D^{(i)}(F)/p$, où $D^{(i)}(F)$ est la généralisation naturelle de $D^{(2)}(F)$ (voir cor. 1.5). Notons $H^q(F, \bullet)$ (resp. $H_S^q(F, \bullet)$) la cohomologie continue du groupe de Galois absolu G_F de F (resp. du groupe de Galois G_S de l'extension (p) -ramifiée maximale de F) comme définie dans [T].

Définition 1.1. — Soit F un corps de nombres quelconque, $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 1$. On note $V_i(F, p^k)$ l'image du morphisme naturel

$$H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$$

On l'appelle le $i^{\text{ième}}$ noyau de Tate $\text{mod } p^k$.

Remarque 1.2. — Le cas $i = 1$ demanderait un traitement particulier. Pour éviter les complications inutiles, nous l'éviterons systématiquement dans cet article, et nous y reviendrons dans [V2], où une étude différente sera proposée.

L'objet de ce travail est la comparaison - lorsqu'elle a un sens - des différents noyaux de Tate $\text{mod } p^k$. Pour que cette comparaison soit possible, il faut pouvoir identifier les groupes $H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ et $H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$; nous demanderons donc que l'image de G_S par la puissance $(i - j)^{\text{ième}}$ du caractère cyclotomique $\text{mod } p^k$ (ie. à valeurs dans $(\mathbb{Z}/p^k)^\times$) soit triviale, ce qui revient à $i \equiv j \text{ mod } [F(\mu_p) : F]$ et

$$k \leq m(F) + v_p(i - j)$$

où $m(F) = \max\{m, \mu_{p^m} \subset F(\mu_p)\}$. Lorsque c'est le cas, on identifiera $V_i(F, p^k)$ à un sous-groupe de $H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$ et l'on dira que $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k)$ sont comparables.

Remarque 1.3. — La définition ci-dessus permet de changer k facilement : comme le diagramme à lignes exactes suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^{k+1}} & H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^{k+1}(i)) \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^k} & H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

la dernière flèche verticale permet d'identifier naturellement $V_i(F, p^k)$ avec $V_i(F, p^{k+1})/p^k$.

Remarque 1.4. — L'inflation de G_S à G_F permet de voir $H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ comme un sous-groupe de $H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$. Comme on suppose $i \neq 1$, l'inflation produit aussi un isomorphisme canonique $H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) = H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (c'est une conséquence directe de la suite exacte de localisation en cohomologie étale, cf [S]). On peut donc voir $V_i(F, p^k)$ comme le sous-groupe $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$ de $H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$.

Proposition 1.1. — Soient $i \equiv j \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, $k \leq m(F) + v_p(i - j)$ et notons $\delta^{(i-j)}$ le G_F -cobord associé à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(i - j) \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z}_p(i - j) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k(i - j) \rightarrow 0$$

Alors le sous-groupe $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k \cap H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k$ de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k$ est l'orthogonal de $\delta^{(i-j)}(\mathbb{Z}/p^k(i - j))$ pour le cup-produit

$$H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k \otimes H^1(F, \mathbb{Z}_p(i - j))[p^k] \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Preuve : La functorialité du cup produit par rapport au décalage donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \mathbb{Z}_p(j)) \otimes H^1(F, \mathbb{Z}_p(i - j)) & \xrightarrow{\cup} & H^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \\ id \downarrow & & \delta^{(i)} \uparrow \\ H^1(F, \mathbb{Z}_p(j)) \otimes \mathbb{Z}/p^k(i - j) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

puis un autre :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k \otimes H^1(F, \mathbb{Z}_p(i - j))[p^k] & \xrightarrow{\cup} & H^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \\ id \downarrow & & \delta^{(i)} \uparrow \\ H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k \otimes \mathbb{Z}/p^k(i - j) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

Maintenant, le cup produit de la ligne inférieure est simplement l'inclusion de groupes $H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k \subset H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$. On voit donc sur ce diagramme que l'orthogonal de $\delta^{(i-j)}(\mathbb{Z}/p^k(i - j))$, vu comme sous-groupe de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k \subset$

$H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$, est l'intersection de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(j))/p^k$ avec le noyau de l'homomorphisme de Bockstein

$$\delta^{(i)} : H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Mais le noyau en question est $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$ et cela termine la preuve. \square

Notons δ_1 l'application de Kummer, c'est-à-dire le morphisme de connexion associé à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \varprojlim \overline{F}^\times \longrightarrow \overline{F}^\times \rightarrow 0$$

Corollaire 1.5. — Soit $i \equiv 1 \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, $i \neq 1$, $k \leq m(F) + v_p(i - 1)$. Notons $D^{(i)}(F, p^k)$ le sous-groupe de F^\times orthogonal à $\mu_p^{\otimes i-1}$ pour le symbole

$$F^\times \otimes \mu_p^{\otimes i-1} \xrightarrow{(\cdots)} H^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

défini par $(x, y) = \delta x \cup \delta_1 y$. Alors $V_i(F, p^k)$, vu comme sous-groupe de $F^\times / F^{\times p}$, s'identifie à $D^{(i)}(F, p^k)/p^k$. En particulier, $V_i(F, p)$ s'identifie avec $V_i := D^{(i)}(F)/p$, où $D^{(i)}(F) := D^{(i)}(F, p)$ est par définition le noyau de Tate généralisé de [AM], [KM] et [H].

Preuve : Compte tenu de la remarque 1.4, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $j = 1$, en remarquant que

$$H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(1)) = F^\times / F^{\times p^k} = H^1(F, \mathbb{Z}_p(1))/p^k$$

\square

Ce corollaire justifie l'appellation "noyau de Tate mod p^k ".

Définition 1.6. — Soit $X^{(i)}(F_\infty) = H_{I_w}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$, et $\delta_i = \text{rg}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$. On dit que i est F -bon si $\delta_i = 0$.

Remarque 1.7. — Puisque $X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma = H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (cela tient à $cd_p G_S \leq 2$, voir [V3] pour plus de détails), δ_i est le \mathbb{Z}_p -rang de $H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$. C. Soulé a montré que tout $i \geq 2$ est F -bon [S]. Par ailleurs, 0 l'est si et seulement si F vérifie la conjecture de Leopoldt en p .

Proposition 1.2. — Notons s le nombre de (p) -places de F , et $\epsilon_i = 1$ si $i \equiv 1 \pmod{[F(\mu_p) : F]}$ ou $i = 0$, $\epsilon_i = 0$ sinon. Le p -rang de $V_i(F, p^k)$ est alors donné par $r_2 + \delta_i + \epsilon_i$ si i est pair, $r_1 + r_2 + \delta_i + \epsilon_i$ si est impair.

Preuve : Il s'agit d'un résultat facile, dont nous donnons rapidement les éléments de la preuve. On renvoie à [V3] pour plus de détails. Pour simplifier, on ne traite que le cas $i \neq 0$. On a alors $H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i))[p] = \mathbb{Z}/p(i)^{G_S}$, et le p -rang annoncé est obtenu en ajoutant ϵ_i au \mathbb{Z}_p -rang de $H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i))$. Pour $i \geq 2$, ce dernier est bien connu : il résulte, via [S], d'un résultat de Borel concernant

les groupes de K -théorie algébrique. Pour $i \neq 0$, $i < 2$, on se ramène au cas $i \geq 2$ de la façon suivante : on a $\mathcal{X}^{(-i)}(F) = \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma$ où F_∞/F est la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de F et Γ son groupe de Galois. Il est facile d'en déduire $rg_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(F) = rg_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) + rg_{\mathbb{Z}_p} t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma$. Maintenant le Λ -rang de $\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ est le même que celui de $\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)$ où $j \equiv i \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, $j \geq 2$; et ce dernier se déduit facilement des formules de Borel pour tous les F_n . Par ailleurs, on sait que $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ est pseudo-isomorphe au module $X^{(i)}(F_\infty)$ dont l'action de Γ aurait été inversée. Le résultat s'en déduit facilement. \square

2. Comparaison mod p^k

On fixe $i \equiv j \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, et on suppose toujours que $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k)$ sont comparables, ie. $k \leq m(F) + v_p(i - j)$.

Commençons par rappeler les notations évoquées dans l'introduction :

Définition 2.1. — Soit F_∞/F la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de $F = F_0$, Γ son groupe de Galois, et $X^{(i)}(F_\infty) = H_{I_w}^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ le module d'Iwasawa habituel (cf Notations). Pour i, j F_n -bons (cf def 1.6), on adopte les notations suivantes :

- h est l'exposant du sous-module fini maximal (aussi appelé noyau de capitulation) $X^{(i)}(F_\infty)^0$ de $X^{(i)}(F_\infty)$. Notons que si $i \equiv 1 \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, les groupes $X^{(i)}(F_\infty)^0$ et $X^{(j)}(F_\infty)^0$ sont égaux.

- $h(F, i, j)$ est le plus petit des exposants des groupes $X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ et $X^{(j)}(F_\infty)^\Gamma$ (ces groupes sont finis car i et j sont F_n -bons).

- $k(F, i, j) = \max\{k \leq m(F) + v_p(i - j), V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k)\}$ est la précision maximale d'égalité des $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ noyaux de Tate.

- n_0 est le plus petit étage n tels que l'un des deux modules $X^{(i)}(F_\infty)^0$, $X^{(j)}(F_\infty)^0$ soit fixé par Γ_n .

L'objet de ce paragraphe est la preuve du résultat principal :

Théorème 2.2. — Soient i, j deux entiers F_n -bons, congrus mod $[F(\mu_p) : F]$. Alors on a l'égalité suivante

$$k(F_n, i, j) + h(F_n, i, j) = m(F_n) + v_p(i - j)$$

pour tout $n \geq n_0$. De plus l'inégalité

$$k(F_n, i, j) + h(F_n, i, j) \geq m(F_n) + v_p(i - j)$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Avant de passer à la preuve, notons tout de suite que les résultats de [G] mentionnés dans l'introduction sont contenus dans ce théorème. En effet, notant $V_i = V_i(F, p)$, on retrouve :

Proposition 2.1. — ([G] §6) *Si F vérifie la conjecture de Leopoldt et contient μ_p , alors*

(i) *Si $m(F) \geq h + 1$, alors $V_0 = V_2$.*

(ii) *Si $X'(F_\infty)^0$ est cyclique d'ordre p et si $m(F) = 1$, alors $V_0 \neq V_2$.*

Preuve : 0 est F -bon puisque F vérifie la conjecture de Leopoldt ; et 2 l'est toujours (cf rem. 1.7).

(i) Comme $h(F, 2, 0) \leq h$ et $v_p(2 - 0) = 0$, l'inégalité du théorème 2.2 donne

$$k(F, 2, 0) \geq m(F) - h(F, 2, 0) \geq m(F) - h \geq 1$$

si bien que $V_0 = V_2$ par définition de $k(F, 2, 0)$.

(ii) Si $h = 1$, alors on a automatiquement $n_0 = 0$ et $h(F, 2, 0) = h = 1$. L'égalité du théorème 2.2 donne donc

$$k(F, 2, 0) = m(F) - h = 0$$

ie. $V_2 \neq V_0$. □

Les résultats de [AM] et [H] ayant trait à la comparaison des noyaux de Tate généralisés pour $i \neq 1$ se déduisent de l'inégalité de 2.2 de la même manière.

Pour prouver 2.2, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3. — *Soit $i \in \mathbb{Z}$; si F contient μ_{p^k} , alors les sous-groupes $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k)$ de $H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$ sont les images réciproques respectives des sous-groupes $(H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{\text{div}}[p^k]$ et $(H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{\text{div}}[p^k]$ de $H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$ (comme groupe c'est aussi $H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$), par l'application naturelle*

$$\phi_j : H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(j)) \rightarrow H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$$

Preuve : Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p(i) & \xrightarrow{p^k} & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^k(i) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \frac{1}{p^k} & & \downarrow \frac{1}{p^k} & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

En prenant la G_S -cohomologie, on obtient le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
Z_i & \longrightarrow & Z_i & \hookrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k & \hookrightarrow & H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \twoheadrightarrow & H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\
\downarrow & & \downarrow f_i & & \downarrow \\
H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[p^k] & \xrightarrow{g_i} & H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))[p^k] & \twoheadrightarrow & H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où Z_i désigne $H_S^0(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ si $i \neq 0$ et 0 si $i = 0$. On voit sur ce diagramme que $V_i(F, p^k) = f_i^{-1}(\text{Im } g_i) = H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{\text{div}}[p^k]$. Comme $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est divisible, on obtient par inflation-restriction la suite exacte suivante :

$$H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))[p^k] \hookrightarrow H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{\text{div}}[p^k] \twoheadrightarrow (H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{\text{div}}[p^k]$$

Finalement, $V_i(F, p^k)$ est l'image réciproque de $H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{\text{div}}[p^k]$ par l'application composée

$$\phi_i : H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) \xrightarrow{f_i} H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_F^{F_\infty}} H^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

Maintenant, les applications ϕ_i et ϕ_j coïncident en tant que morphismes de groupes, comme on peut s'en convaincre en observant le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
H_S^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \xrightarrow{\text{res}} & H_S^1(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i)) \\
\downarrow f_i & & \downarrow \\
H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow[\sim]{\text{res}} & H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma
\end{array}$$

□

Preuve de 2.2 : Quitte à changer F , on peut toujours supposer $F_n = F$. Cela revient à traduire la condition supplémentaire " $n \geq n_0$ " par "l'un des deux modules $X^{(i)}(F_\infty)^0$, $X^{(j)}(F_\infty)^0$ est fixé par Γ ". Il s'agit de montrer que

$$k \leq m(F) + v_p(i - j) - h(F, i, j) \Rightarrow V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k)$$

et que sous la condition supplémentaire, on a en fait l'équivalence.

D'après le lemme 2.3, $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k)$ sont égaux si et seulement si les sous-groupes $(H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{\text{div}}[p^k]$ et $(H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{\text{div}}[p^k]$ de $H^1(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(j))^\Gamma \subset H_S^1(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$ sont égaux. En passant aux orthogonaux via l'accouplement parfait suivant (voir Notations pour $\mathcal{X}^{(-j)}$)

$$(1) \quad H_S^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p/p^k(j))^\Gamma \otimes \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k \rightarrow \mathbb{Z}/p^k$$

on obtient l'équivalence

$$V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k) \Leftrightarrow (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$$

où l'on regarde $(t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$ et $(t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$ comme des sous-espaces de $\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k = \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k$. Maintenant i et j sont supposés F -bons, $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma$ et $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty))_\Gamma$ sont donc de \mathbb{Z}_p -torsion (cf [V3], Cor. 1.2.41), si bien que

$$(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty))_\Gamma/p^k \subset (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k \cap (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$$

L'égalité en question équivaut donc à la suivante, en tant que sous-groupes de $(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma/p^k$:

$$(t_{\mathbb{Z}_p}(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p}(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty))_\Gamma)/p^k$$

Il est bien connu (Voir par ex. [J] cor. 6.5 b, ou [V3], rem. 3.2.27) que le Λ -module $(X^{(i)}(F_\infty)^0)^\vee$ est isomorphe au conoyau de l'application canonique

$$f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty), \Lambda), \Lambda)$$

La preuve de la proposition 2.2 se réduit donc au lemme algébrique suivant, en prenant $M = f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$, $e = i - j$ et $h' = h(F, i, j)$.

Lemme 2.4. — *Soit M un Λ -module noethérien, sans torsion et soit $e \in \mathbb{Z}$. Soit H le conoyau de l'application naturelle $M \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda)$. Notons encore*

$$h' = \min(v_p(\exp(H^\Gamma)), v_p(\exp(H(e)^\Gamma)))$$

et

$$n = v_p((\mathbb{Z}_p^\times : \kappa(\Gamma))) + 1 = m(F)$$

κ étant le caractère cyclotomique. Si $v_p(e) \geq h' - n + k$, alors les sous-groupes $(t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k$ et $(t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k$ de $M_\Gamma/p^k = M(e)_\Gamma/p^k$ sont égaux.

Si l'on suppose de plus que l'un des deux Λ -modules H , $H(e)$ est fixé par Γ , alors on a l'équivalence

$$(t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k \Leftrightarrow v_p(e) \geq h' - n + k$$

Preuve de 2.4, sens direct : Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.5. — *Soit Z un \mathbb{Z}_p -module noethérien, h' et k deux entiers naturels, alors l'image de l'application naturelle $Z/p^{h'+k}[p^{h'}] \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p} Z/p^k$ est triviale.*

Preuve : C'est trivial si l'on décompose $Z = t_{\mathbb{Z}_p} Z \oplus f_{\mathbb{Z}_p} Z$. □

Supposons $n + v_p(e) \geq h' + k$, on peut alors faire les identifications suivantes : $M_\Gamma/p^{h'+k} = M(e)_\Gamma/p^{h'+k}$ et $M_\Gamma/p^k = M(e)_\Gamma/p^k$. Il s'agit de montrer que $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$ et $t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k(-e)$, vus comme sous-modules de M_Γ/p^k , sont égaux. D'abord ils ont même ordre puisque

$$\#(f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k) = \#(f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k) = p^{k \text{rg}_\Lambda M}$$

Ensuite le lemme 2.5 appliqué à $Z = M_\Gamma$ et $Z = M(e)_\Gamma$ montre que tous deux contiennent l'image de l'application naturelle $M_\Gamma/p^{h'+k}[p^{h'}] \rightarrow M_\Gamma/p^k$. On peut supposer sans perte de généralité que $h' = v_p(\exp(H^\Gamma))$. Dans ce cas $v_p(\exp(t_{\mathbb{Z}_p}(M_\Gamma))) = h'$ et $M_\Gamma/p^{h'+k}[p^{h'}]$ contient $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^{h'+k}$ et l'on en déduit que $t_{\mathbb{Z}_p}M(e)_\Gamma(-e)$ contient $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k$, ce qui termine la preuve puisqu'ils ont même ordre.

□

Preuve de 2.4, suite : Passons à l'équivalence dans le cas où l'un des deux Λ -modules $H, H(e)$ est fixé par Γ . Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.6. — *On conserve les hypothèses et notations du lemme 2.4. Soit Z un Λ -module fini. Si Z et $Z(e)$ sont fixés par Γ , c'est que $v_p(\exp(Z)) \leq v_p(e) + n$.*

Preuve : C'est immédiat si l'on décompose Z en Λ -modules cycliques (comme groupes).

□

Il s'agit de montrer que si $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k = t_{\mathbb{Z}_p}M(e)_\Gamma/p^k$, alors $v_p(e) + n \geq h' + k$.

Comme dans [G], §6., on définit les Λ -modules Y, Y_e, Z et Z_e par l'exactitude des suites suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k \rightarrow 0 \\
 0 & \rightarrow & Y_e & \longrightarrow & M(e) & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p}M(e)_\Gamma \rightarrow 0 \\
 0 & \rightarrow & Y & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) & \longrightarrow & Z \rightarrow 0 \\
 0 & \rightarrow & Y_e & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda)(e) & \longrightarrow & Z_e \rightarrow 0
 \end{array}$$

Par hypothèse, on a $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k = t_{\mathbb{Z}_p}M(e)_\Gamma/p^k$, et donc $Y_e = Y(e)$ et $Z_e = Z(e)$.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & Y & \rightarrow & Y & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) & \rightarrow & H \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & f_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k & \rightarrow & Z & \rightarrow & H \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

En prenant la Γ -cohomologie, on observe que le cobord

$$H^\Gamma \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p^k$$

est nul. Cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^\Gamma & \longrightarrow & M_\Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{H}^\Gamma & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k \end{array}$$

Ainsi, la suite

$$0 \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k \longrightarrow Z^\Gamma \longrightarrow H^\Gamma \rightarrow 0$$

est exacte. De la même façon, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma / p^k \longrightarrow Z(e)^\Gamma \longrightarrow H(e)^\Gamma \rightarrow 0$$

Notons alors Z' l'image réciproque, dans Z , de $H' = H^\Gamma \cap H(e)^\Gamma$. Les deux suites exactes ci-dessus montrent que Z' et $Z'(e)$ sont fixés par Γ . Reste, pour appliquer le lemme 2.6, à déterminer l'exposant de Z' . On peut supposer, sans perte de généralité, que Z est fixé par Γ . La surjection $\Lambda^{rg_\Lambda M} = \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) \twoheadrightarrow Z$ montre alors que $rg_{\mathbb{Z}/p} Z/p \leq rg_\Lambda M$. On en déduit que $rg_{\mathbb{Z}/p} Z'/p \leq rg_\Lambda M$. La suite exacte tautologique

$$0 \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k \longrightarrow Z' \longrightarrow H' \rightarrow 0$$

montre alors que $v_p(\exp(Z')) = k + v_p(\exp(H')) = k + h'$ puisque $f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k = (\mathbb{Z}/p^k)^{rg_\Lambda M}$. Grâce au lemme 2.6, on en conclut que $v_p(e) + n \geq k + h'$, et cela termine la preuve. \square

Remarque 2.7. — Si aucun des deux Λ -modules H , $H(e)$, n'est fixé par Γ l'équivalence dans 2.4 n'est plus vraie (et donc a priori dans 2.2 non plus) : cela tient au fait qu'on ne contrôle plus le p -rang de Z' . L'exemple suivant illustre bien la situation : soit M l'idéal $((1+p)^{-1}(1+T) - 1, p^2)$ de $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, et choisissons $n = e = k = 1$. On a alors $H = \mathbb{Z}/p^2(1)$, si bien que ni H , ni $H(1)$ n'est fixé par Γ et que $h' = 1$. On vérifie facilement que les sous-groupes $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p$ et $t_{\mathbb{Z}_p} M(1)_\Gamma / p$ de M_Γ / p sont égaux, bien que l'inégalité $h' + k \leq n + v_p(e)$ ne soit pas satisfaite. En fait $Z = \mathbb{Z}_p[[T]] / (T^2, pT, p^2)$ et $Z' = Z^\Gamma = pZ + TZ = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p$, le raisonnement de la preuve ci-dessus donne donc seulement $n + v_p(e) \geq v_p(\exp(Z')) = 1$.

Remarque 2.8. — Le théorème 2.2 est de nature asymptotique. Cela tient au choix, suivant [G], de l'objet $X'(F_\infty)^0$ pour mesurer la différence entre les noyaux de Tate. Dans [V3], nous remplacerons $X'(F_\infty)^0$ par un objet au niveau fini, ce qui donnera lieu à des résultats au niveau fini.

3. Comparaison F -rationnelle

Soit E/F une extension galoisienne, et i et j deux entiers E -bons, comparables. Si le noyau de capitulation est trivial, alors d'après le théorème 2.2, on a $k(E, i, j) = m(E) + v_p(i - j)$, en d'autres termes, les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ noyaux de Tate sont égaux avec la meilleure précision que l'on puisse espérer. Dans la pratique, il arrive souvent qu'on ait à faire varier le corps E , si bien que dans l'état actuel de nos connaissances, l'hypothèse selon laquelle i et j sont E -bons n'est raisonnable que si i et j sont tous deux ≥ 2 (thm. de Soulé). L'objet de ce paragraphe est de montrer que lorsque i est seulement F -bon, on peut encore affirmer que le $j^{\text{ème}}$ noyau de $\text{mod } p^k$ contient la partie F -rationnelle (voir ci-dessous) du $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $\text{mod } p^k$.

Définition 3.1. — Si E/F est une extension galoisienne finie, on définit le sous-groupe F -rationnel $V_i(E/F, p^k)$ de $V_i(E, p^k)$ par

$$V_i(E/F, p^k) = \text{Im} (H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)))$$

Notons que si $i \neq 0$, $V_i(E/F, p^k)$ est simplement $\text{res}_F^E V_i(F, p^k)$, mais si $i = 0$, ce n'est plus nécessairement le cas. En fait $V_0(E/F, p^k)$ décrit les premiers étages des \mathbb{Z}_p -extensions de E qui proviennent de F par composition avec E .

Théorème 3.2. — Soit E/F une sous-extension finie de \tilde{F}/F . On suppose i F -bon, et $j \equiv i \pmod{[F(\mu_p) : F]}$. Si $X^{(i)}(E_\infty)^0 = 0$, alors $V_i(E/F, p^k) \subset V_j(E, p^k)$ pour tout $k \leq m(F) + v_p(i - j)$.

Preuve : Comme $j \equiv i \pmod{[F(\mu_p) : F]}$, on peut identifier les groupes $H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ et $H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$. Alors, d'après le lemme 2.3, on a

$$V_i(E/F, p^k) \subset V_j(E, p^k) \Leftrightarrow \text{res}_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k) \subset (H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{\text{div}}$$

Considérons l'accouplement suivant :

$$(2) \quad H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma \otimes \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

Comme il s'agit d'un accouplement parfait, il s'agit de montrer que l'orthogonal de $\text{res}_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ contient celui de $(H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{\text{div}}$. Comme $H^1(\Gamma, f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)) = (f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))^\Gamma = 0$, on peut considérer $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$ comme un sous-espace de $\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma$. Nous montrerons les deux faits suivants :

Fait 1 : L'orthogonal de $\text{res}_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ contient $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$.

Fait 2 : L'orthogonal de $(H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{\text{div}}$ est contenu dans $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$.

Commençons par le fait 1. Il s'agit de montrer que $\text{res}_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ et $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ sont orthogonaux pour l'accouplement

$$(3) \quad H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)) \otimes \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

Notons d'abord l'inclusion suivante

$$(4) \quad \text{res}_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k) \subset \text{res}_F^{E_\infty} (H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div})$$

(l'inclusion a lieu dans $H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$). En effet, $\text{res}_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ est l'image de l'application composée

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)) \xrightarrow{\text{res}_E^{E_\infty}} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i)) \xrightarrow{\frac{1}{p^k}} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

que l'on peut ré-écrire

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)) \xrightarrow{\frac{1}{p^k}} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_E^{E_\infty}} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

ou encore

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \xrightarrow{\frac{1}{p^k}} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i))^{G(E/F)} \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_E^{E_\infty}} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

Comme $H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i))^{G(E/F)} = \text{res}_F^E H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i))$, on voit donc que le sous-groupe $\text{res}_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ de $H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est contenu dans l'image de l'application composée suivante

$$H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_F^E} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i)) \rightarrow H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_E^{E_\infty}} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

que nous ré-écrivons

$$H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i)) \rightarrow H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{res}_F^{E_\infty}} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

D'où l'inclusion (4), puisque $H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i))$ est divisible.

Maintenant, l'accouplement (3) est compatible avec le suivant :

$$(5) \quad H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{X}^{(-i)}(F) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

(noter que l'on peut remplacer j par i dans (3)) Ainsi pour montrer que $\text{res}_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ et $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ (comme groupe c'est $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty)$) sont orthogonaux, il suffit de montrer que l'image de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \rightarrow \mathcal{X}^{(-i)}(F)$ est orthogonale à $H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}$ pour l'accouplement (5). Remarquons pour cela que l'application $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \rightarrow \mathcal{X}^{(-i)}(F)$ se factorise en

$$t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \rightarrow t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) \rightarrow (t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma \rightarrow \mathcal{X}^{(-i)}(F)$$

Comme i est F -bon, $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma$ est fini (cf [V3], Cor. 1.2.41), l'image l'est donc aussi de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty)$ dans $\mathcal{X}^{(-i)}(F)$ l'est donc aussi, et cela entraîne l'orthogonalité souhaitée.

Passons au fait 2. L'orthogonal de $(H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}$ est exactement $t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma)$. Comme $X^{(j)}(E_\infty)^0 = 0$, c'est que $f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ est libre (cf [V3], rem. 3.2.27), et donc que $t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma) \subset (t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$. \square

Références

- [AM] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for Étale Capitulation Kernels*, *K-Theory*, **33** (2004), 199-213.
- [H] K. Hutchinson, *Tate kernels, étale K-theory and the Gross Kernel*, Preprint (2005).
- [KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **50** (2000), 35-65.
- [G] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of \mathbb{Z}_p -extensions*, *Amer. J. of Math.* **100**, No.6. (1978), 1235-1245.
- [J] U. Jannsen, *Iwasawa Modules up to Isomorphism*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **17** (1989), 171-207.
- [S] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, *Invent. Math.* **55** (1979), 251-295.
- [KC] K. Kramer et A. Candiotti, *On K_2 and \mathbb{Z}_l -extensions of number fields*, *Amer. Journal of Math.* **100** (1978), 177-196.
- [T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, *Invent. Math.* **36** (1976), 257-274.
- [V1] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulations étales et conjecture de Greenberg généralisée*, *K-theory*, **36** (2005), 223-244.
- [V2] D. Vauclair, *Noyaux de Tate et capitulation*, en préparation (2006).
- [V3] D. Vauclair, *Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les \mathbb{Z}_p -extensions d'un corps de nombres*, thèse (2005).

David Vauclair
vauclair@math.univ-fcomte.fr
Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques
CNRS UMR 6623
16, route de Gray
25030 BESANCON CEDEX
France