Cup-produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée

David Vauclair

17 Novembre 2005

Résumé

Let p be an odd prime number and F a number field. We give a "going up" and "going down" description of the cup product

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

For $i \geq 2$, this shows that the image of this cup product capitulates in the compositum $\tilde{F}/F$ of all $\mathbb{Z}_p$-extensions. We use this result to prove, for a large class of fields, a weakened form of Greenberg's generalized (multiple) conjecture. Namely, let k be an imaginary (p)-split quadratic field ; if F contains $k(\mu_p)$ and satisfies Leopoldt conjecture, then the kernel of the extension morphism $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i))$ is not zero.

Mathematics Subject Classification 2000 : 11R23, 11R34, 11R70
Key words : capitulation, cup product, étale K-theory, Galois cohomology, Iwasawa theory.

Table des matières

Introduction

Soit p un nombre premier impair, F un corps de nombres, S l'ensemble des places de F au-dessus de (p) et G_S le groupe de Galois de l'extension non ramifiée hors de S (S-ramifiée) maximale de F. Notons $H^m_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) := H^m(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$, $i \in \mathbb{Z}$, $m = 1, 2$ les groupes de cohomologie p-adique définis dans [Ta]. Pour $i \geq 2$ ils sont canoniquement isomorphes aux groupes de K-théorie étale $K^{et}_{2i-m}\mathcal{O}^S_F$ définis dans [DF] ; pour $i = 1, m = 1$, on retrouve les S-unités p-complétées, et pour $i = 1, m = 2$, un $\mathbb{Z}_p$-module dont la torsion est $\mathcal{C}l_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ et dont le quotient $\mathbb{Z}_p$-libre est le module de Tate du S-groupe de Brauer. On peut se proposer d'étudier le cup-produit

$$c_{i,j} : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i + j))$$

Des exemples se trouvent déjà dans la littérature. Notamment :
- dans [MCS], pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, il est conjecturé que le cup-produit $c_{1,1}$ est surjectif, ce qui entraîne la conjecture (multiple) de Greenberg généralisée (GG) pour $\mathbb{Q}(\mu_p)$, lorsque $\mathcal{C}l(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ est cyclique.
- dans [KM], pour une p-extension cyclique L/F, l'image du cup-produit $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1(L/F, \mathbb{Z}/p) \to H^2(F, \mathbb{Z}/p(i))$ (l'arrivée est la cohomologie du groupe de Galois absolu de F ; si F contient μ_p c'est simplement la p-torsion du groupe de Brauer) est reliée à la propriété de co-descente du noyau sauvage étale dans L/F.

Dans cet article, on se concentrera sur le cup-produit

$$c_{i,0} : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Comme le second argument est $Hom(G_S(F), \mathbb{Z}_p)$, on peut faire une étude par "montée" et "descente". Plus précisément, un élément $a \in H^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ détermine une $\mathbb{Z}_p$-extension $F_\infty = \cup F_n$; notons $\Gamma = G(F_\infty/F)$ son groupe de Galois et $X^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$. Les techniques (cohomologiques) de la théorie d'Iwasawa permettent de regarder l'application $\cup a$ comme la composition d'une application de "montée" $m_a : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ et d'une application de "descente" $d_a : X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. L'application m_a se trouve être surjective et son noyau est le groupe des normes universelles du foncteur $H^1_S(\bullet, \mathbb{Z}_p(i))$ dans l'extension F_∞/F (section 2). Cela permet de généraliser à une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque et à tout couple $(H^1_S(\bullet, \mathbb{Z}_p(i)), H^2_S(\bullet, \mathbb{Z}_p(i)))$ les résultats classiques de Kuz'min, Sinnott, Greither etc... relatifs au couple (S-unités, S-groupe de classes) et à la $\mathbb{Z}_p$-

extension cyclotomique. L'application d_a, quant à elle, fait naturellement apparaître le lien avec capitulation de $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ dans F_∞/F (section 3).

Supposons maintenant que F contient μ_p, et notons $\tilde{F}$ la composée de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F. La conjecture de Greenberg généralisée (GG) prédit alors la trivialité, pour les "bons i" (par exemple $i \geq 2$, voir 3) du groupe $\mathcal{H}^2_S(\tilde{F},\mathbb{Z}_p(i)) := \varinjlim_{L\subset\tilde{F}} H^2_S(L,\mathbb{Z}_p(i))$, où les morphismes de liaison sont donnés par la restriction. On a montré dans [NV] que, lorsque $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique, cette conjecture équivaut à la capitulation de $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ dans $\tilde{F}$. Nous proposons ici, pour chaque "bon i" l'affaiblissement suivant de la conjecture (GG) :

Conjecture 0.1 ($GGf^{(i)}$) *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. Si $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \neq 0$ alors le noyau $cap^{(i)}(\tilde{F}/F)$ de l'homomorphisme d'extension*

$$H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(\tilde{F},\mathbb{Z}_p(i))$$

est non trivial.

Le résultat principal de cet article (th. 3.8) affirme que l'image du cup-produit $c_{i,0}$ capitule dans $\tilde{F}/F$. Moyennant la conjecture de Leopoldt, nous utilisons ce résultat pour démontrer $GGf^{(i)}$ pour tout corps F contenant μ_p et un corps quadratique imaginaire (p)-décomposé.

Cet article est extrait d'une partie de ma thèse [V1], préparée au Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Besançon, sous la direction de T. Nguyen Quang Do, que je remercie pour son aide et ses encouragements.

Notations

p un nombre premier impair.
F un corps de nombres (ie. une extension finie de $\mathbb{Q}$).
F_v le complété de F en la place v.
S l'ensemble des places au dessus de (p).
$\mathcal{O}^S_F$ les S-entiers de F.
G_S le groupe de Galois S-ramifié maximal au-dessus de F.
$H^q_S(F,\bullet) = H^q(G_S,\bullet)$ (resp. $H^S_q(F,\bullet) = H_q(G_S,\bullet)$) la cohomologie continue (resp. l'homologie compacte) au-dessus de F. Ces notations permettent de

faire varier F.
$H^q(F,\bullet)$ (resp. $H^q(F_v,\bullet)$) la cohomologie continue du groupe de Galois absolu au-dessus de F (resp. au-dessus de F_v).
$Ker^m_S(F,\bullet)$ est le noyau de la localisation $H^m_S(F,\bullet) \to \underset{v\in S}{\oplus} H^m(F_v,\bullet)$.
$E_S(F)$ les S-unités de F (noter l'isomorphisme canonique entre $E_S(F)\otimes\mathbb{Z}_p$ et $H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(1))$).
E_S les S-unités de la clôture S-ramifiée de F.
$\mathcal{C}l_S(F)$ le groupe des S-classes de F (noter l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{C}l_S(F)\otimes\mathbb{Z}_p$ et $Ker^m_S(F,\mathbb{Z}_p(1))$).
F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension de F, Γ son groupe de Galois et $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ son algèbre de groupe complète.
F^c_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.
$\lambda(M),\mu(M)$ les invariants d'Iwasawa du Λ-module de torsion M.
$\tilde{F}/F$ la $\mathbb{Z}_p$-extension multiple maximale de F, $\tilde{\Gamma}$ son groupe de Galois et $\tilde{\Lambda}$ son algèbre de groupe complète.
Pour une extension algébrique de E/F, on laisse L/F varier parmi les sous-extensions finies de F pour définir les modules galoisiens suivants :

$\mathcal{H}^m_S(E,\mathbb{Z}_p(i)) = \varinjlim H^m_S(L,\mathbb{Z}_p(i))$

$X^{(i)}(E) = \varprojlim H^2_S(L,\mathbb{Z}_p(i))$

$WX^{(i)}(E) = \varprojlim Ker^2_S(L,\mathbb{Z}_p(i))$

$X'(E) = \varprojlim(\mathcal{C}l_S(L)\otimes\mathbb{Z}_p) = WX^{(0)}(E)$

$\mathcal{X}^{(-i)}(E) = H^S_1(E,\mathbb{Z}_p(-i)) = \varprojlim H^S_1(L,\mathbb{Z}_p(-i))$

$\mathcal{X}(E) = \mathcal{X}^{(0)}(E) = G_S(E)^{ab}$

$\bullet[p]$, $\bullet/p$, $\bullet^\vee$ désignent respectivement les foncteurs p-torsion, p-quotient, et dualité de Pontryagin.
Pour un Λ-module M, $t_\Lambda M$ désigne la torsion de M et $f_\Lambda M = M/t_\Lambda M$.
$M\approx_\Lambda M'$ signifie que les Λ-modules sont pseudo-isomorphes (ie. il existe un morphisme dont le noyau et le conoyau sont pseudo-nuls, c'est-à-dire que la hauteur de Krull de leur annulateur est ≥ 2).
M^0 est le sous-module pseudo-nul maximal du Λ-module noethérien M.

On utilisera librement la suite exacte canonique suivante :

$$0 \longrightarrow (t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^2_S(E,\mathbb{Z}_p(i)))^\vee \longrightarrow \mathcal{X}^{(-i)}(E) \to \mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(i))\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee \longrightarrow 0$$

obtenue en appliquant la dualité de Pontryagin à la description, par [Ta] prop. 2.3, de l'image et du noyau du cobord associé à la suite exacte de

$G_S(E)$-modules topologiques

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(i) \longrightarrow \mathbb{Q}_p(i) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \longrightarrow 0$$

Pour $i = 1$, on reconnaît la suite exacte duale à celle de Kummer.

1 Interprétation par "montée" et "descente"

On présente ici le résultat technique (1.1) qui servira de support à toute la suite. Il s'agit essentiellement de comparer l'application $\cup a$ modulo p^n à la différentielle $d_2^{0,2}$ d'une certaine suite spectrale. En fin de section on signale sans démonstration une formule explicite pour le symbole de deux S-unités d'un corps de nombres.

L'application $\cup a : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

Fixons $i \neq 0$. Soit F un corps de nombres, S l'ensemble des (p)-places de F, et $G_S = G_S(F)$ le groupe de Galois de l'extension S-ramifiée maximale de F. On note $H^m_S(F, \bullet) = H^m(G_S(F), \bullet)$ la cohomologie continue de $G_S(F)$. D'après [Ta], prop. 2.2, l'application naturelle $H^m_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \varprojlim H^m_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ est un isomorphisme.

Il suffit, pour décrire le cup-produit

$$\cup : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

de connaître les applications $\cup a : H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ où a est un élément de $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p) = Hom(G_S, \mathbb{Z}_p)$, non divisible par p. Soit donc un tel a et notons a_n son image dans $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^n) = Hom(G_S, \mathbb{Z}/p^n)$. Soit F_n le corps fixé par le noyau $G_S(F_n)$ de a_n, et $G_n = G(F_n/F)$. On notera simplement *res* et *cor* (resp. *rês*, *côr*) pour les morphismes de restriction et co-restriction dans l'extension F_n/F (resp. leurs modifications évidentes). L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 *On suppose toujours $i \neq 0$. Il existe $\alpha_n \in H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)^{G_n}$ tel que $a = cor\, \alpha_n$ et le cup-produit avec α_n induit un isomorphisme dans le* *diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup\alpha_n} & \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \\
{\scriptstyle r\hat{e}s}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle c\hat{o}r} \\
H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a_n} & H^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(i))
\end{array}$$

En particulier $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor(H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))^{G_n})$ dès que p^n tue le groupe $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$.

Preuve : Commençons par montrer l'existence de $\alpha_n \in H^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ tel que $cor\,\alpha_n = a$. Notons $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{inf} & H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \\
{\scriptstyle cor}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle cor} \\
H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{inf} & H^1_S(F, \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

Par définition de F_∞, on peut écrire $a = \inf \overline{a}$, où $\overline{a} \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p)$. La corestriction de gauche étant un isomorphisme, il existe $\overline{\alpha}_n \in H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p)$ tel que $\overline{a} = cor\,\overline{\alpha}_n$. Notons $\alpha_n = inf\,\overline{\alpha}_n$, on a alors $cor\,\alpha_n = a$. Remarquons que, comme $H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p)$ est fixé par G_n, α_n l'est aussi et l'application $\cup\alpha_n$ est G_n-équivariante. Le cup-produit avec α_n induit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & H^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \\
{\scriptstyle res}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle cor} \\
H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a} & H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

Notant ν_{G_n} la norme algébrique, on a $cor \circ \nu_{G_n} = p^n\, cor$. La flèche notée $\hat{cor} : \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(i))$ est donc bien définie et le diagramme du théorème est induit par le carré ci-dessus.

Reste à montrer que $\cup\alpha_n : \hat{H}^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ est un isomorphisme. Pour cela, nous allons le comparer avec l'isomorphisme bien connu

$$\hat{d}^{0,2}_2 : \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \xrightarrow{\sim} H^2(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$$

Rappelons d'abord la construction de cet isomorphisme. Comme $\mathbb{Z}_p(i)^{G_S} = 0$ et $cd_p(G_S) \leq 2$, un rapide examen des premiers termes de la suite spectrale de l'extension de groupes

$$1 \to G_S(F_n) \longrightarrow G_S \longrightarrow G_n \to 1$$

donne la suite exacte (voir aussi [Ka] th. 4.2)

$$H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \overset{d^{0,2}_2}{\twoheadrightarrow} H^2(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$$

D'autre part, comme $cd_p\, G_S \leq 2$, on sait que l'application de co-restriction $cor : H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est surjective (cf [Se2], lettre de Tate). Ainsi l'image de la norme algébrique $\nu_{G_n} : H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ est $res\, H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$, et finalement $d^{0,2}_2$ induit l'isomorphisme $\hat{d}^{0,2}_2$ annoncé plus haut.

Nous allons montrer que l'application composée

$$\hat{d}^{0,2}_2 \circ \cup\alpha_n : \hat{H}^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to H^2(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$$

est un isomorphisme, ce qui terminera la preuve. Notons pour simplifier $E^{p,q}_2(\mathbb{Z}_p(i)) = H^p(G_n, H^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ et $\hat{E}^{p,q}_2(\mathbb{Z}_p(i)) = \hat{H}^p(G_n, H^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$. Le cup-produit

$$H^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes H^{q'}_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to H^{q+q'}_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$$

induit un cup-produit

$$E^{p,q}_2(\mathbb{Z}_p(i)) \otimes E^{p'+q'}_2(\mathbb{Z}_p) \to E^{p+p',q+q'}_2(\mathbb{Z}_p(i))$$

et l'on a (cf [NSW], ex. 6 p.96 ou [J2]), pour $\beta \in E_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(i))$,$\gamma \in E_2^{p',q'}(\mathbb{Z}_p)$

$$d_2^{p+p',q+q'}(\beta \cup \gamma) = d_2^{p,q}\beta \cup \gamma + (-1)^{p+q}\beta \cup d_2^{p',q'}\gamma$$

Rappelons que $\alpha_n \in E_2^{0,1}(\mathbb{Z}_p)$. La différentielle $d_2^{0,1}$ de la suite spectrale à coefficients dans $\mathbb{Z}_p(i)$ est nulle puisqu'à valeurs dans $H^2(G_n, H_S^0(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) = 0$. La formule ci-dessus donne donc, pour $\beta \in E_2^{0,1}(\mathbb{Z}_p(i))$:

$$d_2^{0,2}(\beta \cup \alpha_n) = \beta \cup d_2^{0,1}\alpha_n$$

Soit δ_{G_n} l'homomorphisme de Bockstein, c'est-à-dire le morphisme de connection associé à la suite exacte de G_n-modules $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^n$. En tenant compte du lemme ci-dessous, on obtient $d_2^{0,2}(\beta \cup \alpha_n) = -\beta \cup \delta_{G_n} a_n$ ie. $\hat{d}_2^{0,2} \circ \cup \alpha_n = -\cup \delta_{G_n} a_n$, ce qui termine la preuve puisque $\cup \delta_{G_n} a_n : \hat{H}^0(G_n, \bullet) \to H^2(G_n, \bullet)$ est un isomorphisme ([Se1]).

$\square$

Lemme 1.2 $d_2^{0,1}\alpha_n = -\delta_{G_n} a_n$

Preuve : Comme l'action de $G_S(F_n)$ est triviale sur $\mathbb{Z}_p$, on sait exprimer la transgression $d_2^{0,1}$ comme un cup-produit. Précisément, si u est l'élément de $H^2(G_n, G_S(F_n)^{ab})$ correspondant à l'extension de groupes

$$1 \to G_S(F_n)^{ab} \longrightarrow G_S/[G_S(F_n), G_S(F_n)] \longrightarrow G_n \to 1$$

alors $d_2^{0,1}\alpha_n = -\alpha_n \cup u$. Soit, pour $0 \leq k \leq p^n - 1$, $\sigma_k \in G_S$ tel que $a(\sigma_k) = k$. On peut représenter u par un 2-cocycle défini par

$$u(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}}$$

où $\overline{k}$ désigne l'entier congru à k modulo p^n compris entre 0 et $p^n - 1$. On obtient alors

$$\alpha_n \cup u(\tau_1, \tau_2) = \alpha_n(u(\tau_1, \tau_2)) = \alpha_n(\sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}})$$

Maintenant, *res* $a = p^n(\alpha_n)$ donc

$$\alpha_n(u(\tau_1,\tau_2)) = \frac{1}{p^n} a(\sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}})$$

$$= \frac{1}{p^n}(\overline{\alpha_n(\tau_1)} + \overline{\alpha_n(\tau_2)} - \overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}) = \delta_{G_n} a_n(\tau_1,\tau_2)$$

□

Remarque 1.3 *Si $i = 0$, les termes $E_2^{p,0}(\mathbb{Z}_p(i))$ ne sont plus triviaux; la comparaison entre $\cup\alpha_n$ et $d_2^{0,2}$ est alors plus technique, c'est la raison pour laquelle on supposera systématiquement $i \neq 0$ dans ce papier. On renvoie à l'appendice de [V2] pour le cas $i = 0$.*

Remarque 1.4 *En fait le théorème 1.1 est vrai dans un cadre plus général, puisque les seules propriétés de G_S que nous avons utilisées sont $cd_p G_S \leq 2$ et la finitude des groupes $H^1(G_S,\mathbb{Z}/p)$ et $H^2(G_S,\mathbb{Z}/p)$. Par exemple, on peut remplacer G_S par le groupe de Galois absolu d'un complété F_v.*

Symbole de S-unités

Soit F un corps de nombres contenant μ_{p^n}, $n > 0$. Dans ce cadre, on peut comparer le théorème 1.1 avec un résultat récent de [MCS]. Indiquons brièvement comment. Si x et y sont deux S-unités de F, on définit le symbole $(y,x)_S = \delta_S y \cup \delta_S x$ où δ_S est le cobord de la suite exacte de Kummer

$$0 \;\rightarrow\; T_p \;\longrightarrow\; \varprojlim_p E_S \;\longrightarrow\; E_S \;\rightarrow\; 0$$

dans laquelle $T_p = \varprojlim \mu_{p^k}$. Rappelons que $\mathcal{C}l_S(F) \otimes \mu_{p^n}$ s'injecte canoniquement dans $H^2_S(F,T_p) \otimes \mu_{p^n} = H^2_S(F,\mu_{p^n}^{\otimes 2})$ (cf [Ta]). Dans ce cadre, [MCS] th. 2.4 donne une formule modulo p^n pour le symbole $(y,x)_S$. On peut l'exprimer de la façon suivante :

Proposition 1.5 *([MCS] th. 2.4). Soit F un corps de nombres contenant μ_{p^n}, $x \in E_S(F)$ et F_n/F l'extension correspondant à $\delta x \in H^1_S(F,\mu_{p^n})$, de groupe de Galois G_n. Fixons une racine primitive $p^{n\,ieme}$ de l'unité ζ, δx*

détermine alors un élément $a_n \in H^1(G_n, \mathbb{Z}/p^n)$. *Le symbole* $(.,x)$ *envoie* $E_S(F) \cap \nu_{G_n} F_n^\times$ *dans* $\mathcal{C}l_S(F) \otimes \mu_{p^n}$ *(vu comme sous-groupe de* $H^2_S(F, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$*) et l'on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E_S(F) \cap NF_n^\times / NE_S(F_n) & \xrightarrow{\phi^{-1}\circ(\cup \delta_{G_n} a_n)} & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{C}l_S(F_n)) \\ {\scriptstyle r\hat{e}s}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle c\hat{o}r\otimes\zeta} \\ E_S(F) \cap NF_n^\times & \xrightarrow{\cup x} & \mathcal{C}l_S(F) \otimes \mu_{p^n} \end{array}$$

où δ_{G_n} *désigne, comme dans le paragraphe précédent, l'homomorphisme de Bockstein, et* $\phi : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{C}l_S(F_n)) \to Ker(H^2(G_n, E_S(F_n)) \to H^2(G_n, F_n^\times))$ *est l'isomorphisme induit par le double cobord associé à la suite exacte de* G_n*-modules*

$$E_S(F_n) \hookrightarrow F_n^\times \to I_S(F_n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}l_S(F_n)$$

dans laquelle $I_S(F_n)$ *est le groupe des idéaux de* F_n *à support hors de* S.

$\square$

Dans le cas où l'extension $F(a^{\frac{1}{p^n}})/F$ est $\mathbb{Z}_p$-plongeable, ce résultat est cohérent avec l'interprétation du cup produit par une différentielle de la suite spectrale. En fait les méthodes du paragraphe précédent permettent d'en donner une nouvelle preuve. On renvoie à [V1] pour les détails.

2 Normes universelles et sous-modules finis

Le théorème 1.1 donne une description de l'application $\cup a$ par "montée" et "descente" dans les étages de la $\mathbb{Z}_p$-extension définie par a. On s'attarde ici sur le l'homomorphisme de "montée". En passant à la limite, on voit apparaître naturellement les normes universelles et les sous-modules finis.

Fixons $a \in H^1_S(F,\mathbb{Z}_p) = Hom(G_S,\mathbb{Z}_p)$ un homomorphisme surjectif. Comme dans la section précédente, a définit une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F dont le groupe de Galois est noté Γ et les étages de degré p^n, F_n/F. Notons $Ker^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$ les noyaux de localisation. Soit $X^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim H^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$, $X^{(i)}(F_{\infty,v}) = \varprojlim H^2(F_{n,v},\mathbb{Z}_p(i))$ et $WX^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim Ker^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow WX^{(i)}(F_\infty) \longrightarrow X^{(i)}(F_\infty) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})$$

où $\Lambda_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$.

Lemme 2.1 *En passant à la limite via la co-restriction, on obtient un isomorphisme*

$$X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma = \varprojlim \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$$

Preuve : Rappelons d'abord que l'isomorphisme fonctoriel (cf [Se2], lettre de Tate)

$$(H^2_S(F_m,\mathbb{Z}_p(i)))_{\Gamma_n/\Gamma_m} \overset{cor}{\rightarrow} H^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$$

donne par passage à la limite un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m} & \rightarrow & H^2_S(F_m,\mathbb{Z}_p(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n} & \rightarrow & H^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \end{array}$$

dans lequel toutes les applications sont naturelles.

Soit γ un générateur de Γ et notons $\nu_n = \frac{\gamma^{p^n}-1}{\gamma-1}$ la norme algébrique. Pour $m \geq n$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m} & \stackrel{\nu_m}{\to} & (X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m})^{G_m} & \to & \hat{H}^0(G_m, H^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) & \to & 0 \\
\frac{\nu_m}{\nu_n}\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & cor_{F_n}^{F_m}\Big\downarrow & & \\
X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n} & \stackrel{\nu_n}{\to} & (X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n})^{G_n} & \to & \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \to & 0
\end{array}$$

Comme ν_n tend vers 0, on obtient l'isomorphisme annoncé en passant à la limite projective sur n.

$\square$

On définit par passage à la limite un cup-produit

$$\varinjlim H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \varprojlim H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to X^{(i)}(F_\infty)$$

On a déjà vu dans la première section qu'il existe $\alpha = \varprojlim \alpha_n \in \varprojlim H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)$ avec $\alpha_0 = a$. C'est le cup-produit avec α qui donne l'homomorphisme de "montée", noté m_a dans l'introduction.

Théorème 2.2 *Soit $i \neq 0$. Le cup-produit avec α donne les suites exactes suivantes :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{N}^{(i)}(F) & \longrightarrow & H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha} & X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma & \to & 0 \\
 & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{N}^{(i)}(F) & \longrightarrow & \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) & \xrightarrow{\cup\alpha} & WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma & \to & 0
\end{array}$$

dans lesquelles $\mathcal{N}^{(i)}(F)$ (resp. $\mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F)$) est le groupe des normes universelles (resp. groupe des normes universelles locales) c'est-à-dire l'image de l'application

$$\varprojlim H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

(resp. l'image réciproque par la localisation de l'image de l'application

$$\bigoplus_{v\in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} \varprojlim H^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow \bigoplus_{v\in S(F)} H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$$

où $\Lambda_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$*).*

On fait systématiquement un abus de langage en identifiant une place $v \in S(F)$ à l'une de ses extensions à F_∞, fixée une fois pour toutes.

Remarque 2.3 *Un élément* $x \in H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ *est une norme locale universelle si et seulement si son localisé* $x_v \in H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ *est dans l'image de* $\varprojlim H^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ *pour toutes les places* $v \in S(F)$*.*

Preuve de 2.2 : Compte-tenu du lemme précédent, la première suite exacte provient du théorème 1.1 par passage à la limite projective sur n. Détaillons : pour $m \geq n$, il y a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(H^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_m} & \xrightarrow{\cup\alpha_m} & (H^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_m} \\
{\scriptstyle (res^{F_m}_{F_n})^{-1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle cor^{F_m}_{F_n}} \\
(H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_n} & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & (H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_n}
\end{array}$$

et celui-ci en induit un second :

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(G_m, H^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup\alpha_m} & \hat{H}^0(G_m, H^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) \\
{\scriptstyle (res^{F_m}_{F_n})^{-1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle cor^{F_m}_{F_n}} \\
\hat{H}^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup\alpha_n} & \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))
\end{array}$$

En passant à la limite projective, on obtient bien la première suite exacte.

De la même façon, on obtient, pour chaque (p)-place v finiment décomposée dans F_∞ (ie. $F_{\infty,v} \neq F_v$), une suite exacte

$$\varprojlim H^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\cup\alpha_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})^{\Gamma_v} \to 0$$

où $\alpha_v = \varprojlim \alpha_{n,v}$ est le localisé de α (N.B : pour $n >> 0$, $\alpha_{n,v}$ n'est pas divisible par p). Soit $S^{fd}(F) = \{v \in S(F), F_{\infty,v} \neq F_v\}$. Après induction, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N}^{(i)}(F) & \hookrightarrow & H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \overset{\cup\alpha}{\twoheadrightarrow} & X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \underset{\Lambda_v}{\otimes} \varprojlim H^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & \bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \underset{\Lambda_v}{\otimes} H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})^{\Gamma_v}
\end{array}$$

Compte-tenu de la suite exacte

$$0 \to WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \longrightarrow X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \longrightarrow \Big(\bigoplus_{v \in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})\Big)^\Gamma$$

et ayant remarqué que $(\Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v}))^\Gamma = 0$ si $v \in S(F) \backslash S^{fd}(F)$, une chasse rapide dans le diagramme ci-dessus donne la seconde ligne exacte de la proposition.

□

Remarque 2.4 *Rappelons que $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(1)) = E_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ et $WX^{(1)}(F_\infty) = X'(F_\infty)$ (cf Notations). Aussi, si $i = 1$, la seconde suite exacte de la proposition ci-dessus généralise à une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque un résultat de*

Kuz'min ([Ku] prop. 7.5) relatif à la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique : $X'(F_\infty)^\Gamma$ est isomorphe au quotient des S-unités de F qui sont des normes locales universelles dans F_∞/F par les S-unités de F qui sont des normes universelles globales de S-unités dans F_∞/F.

Soit $W^{(i)}(F_n) = H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))/Ker^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ et $W^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim W^{(i)}(F_n)$. Notons $H_0^S(F, \bullet)$ (resp. $H_0(F_v, \bullet)$) l'homologie compacte de G_S (resp. du groupe de Galois absolu de F_v). La fin de la suite exacte longue de Poitou-Tate (cf. [Sch]) donne alors, après passage à la limite projective sur les F_n, une suite exacte de Λ-modules :

$$W^{(i)}(F_\infty) \hookrightarrow \bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \twoheadrightarrow H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$$

dans laquelle la dernière flèche est définie par la somme directe des applications $\Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$ obtenues en composant les applications naturelles $\Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1))$ et $H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$.

On notera $m_i(F)$ (resp. $m_i(F_v)$) l'ordre de $H_0^S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (resp. $H_0(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$) pour $i \neq 0$ et $m_0(F) = m_0(F_v) = 1$. Enfin le signe $\widetilde{\oplus}$ désigne le noyau de la somme.

Corollaire 2.5 *Notons encore $S^{fd}(F) \subset S(F)$ l'ensemble des (p)-places finiment décomposées dans F_∞/F. Il y a une suite exacte "à la Sinnott" :*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) & \hookrightarrow & H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & \widetilde{\bigoplus}_{S^{fd}(F)} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v} & \to & \\ WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \to & Ker^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & W^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \twoheadrightarrow & W^{(i)}(F) \end{array}$$

En particulier, le noyau de l'application $WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to Ker^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est engendré par au plus $\#S^{fd}(F) - 1$ éléments et son conoyau est cyclique d'ordre égal à $max(1, \min_{v \in S^{fd}(F)} \dfrac{(\Gamma : \Gamma_v) m_{i-1}(F)}{m_{i-1}(F_v)})$.

Remarque 2.6 *Pour $i = 1$, il s'agit bien d'une généralisation aux $\mathbb{Z}_p$-extensions quelconques de la suite exacte de Sinnott (cf [FGS], appendix by Sinnott, et [Ko])*

Remarque 2.7 *Nous invitons le lecteur à comparer cette suite exacte avec les résultats de [KM] (notamment avec le théorème 2.14).*

Preuve : Le théorème 2.2 montre que les applications $\mathcal{N}_{loc}^{(i)}(F) \to H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ et $WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ ont le même conoyau, d'où une suite exacte

$$\mathcal{N}_{loc}^{(i)}(F) \hookrightarrow H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to W^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \twoheadrightarrow W^{(i)}(F_\infty)_\Gamma$$

par Γ-homologie de la suite exacte courte définissant $W^{(i)}(F_\infty)$.

Maintenant, la seconde flèche verticale est un isomorphisme dans le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & W^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Ker^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & W^{(i)}(F) & \to & 0
\end{array}$$

et donc une chasse rapide donne la suite exacte de l'énoncé, au troisième terme près. Il suffit, pour obtenir celui-ci, de remarquer que pour $v \notin S^{fd}(F)$, on a $(\Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v}))^\Gamma = 0$, ce qui termine la preuve de la suite exacte.

Reste à déterminer le noyau de $W^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to W^{(i)}(F)$. Les deux flèches verticales de droites sont des isomorphismes dans le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
W^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & (\bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)))_\Gamma & \twoheadrightarrow & H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))_\Gamma \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
W^{(i)}(F) & \hookrightarrow & (\bigoplus_{S(F)} H_0(F_v, \mathbb{Z}_p(i-1))) & \twoheadrightarrow & H_0^S(F, \mathbb{Z}_p(i-1))
\end{array}$$

On voit donc que le noyau en question est isomorphe au conoyau de l'application $(\bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)))^\Gamma \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))^\Gamma$. Ce dernier est cyclique, d'ordre $max(1, \underset{v \in S^{fd}(F)}{min} \dfrac{(\Gamma : \Gamma_v) m_{i-1}(F)}{m_{i-1}(F_v)})$.

$\square$

Remarque 2.8 *La description arithmétique des modules de normes universelles par le théorème 2.2 possède d'autres applications. Elle permet notamment de décrire, dans une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F quelconque, la structure des Λ-modules $f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ et $\varprojlim H_S^1(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$. On renvoie à [V3] pour des énoncés précis.*

3 Cup produit et capitulation

Dans l'optique de l'interprétation du cup-produit avec un élément de $H_S^1(F, \mathbb{Z}_p)$ par "montée" et "descente" dans la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F qu'il définit, nous savons que la "montée" : $H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ est surjective et son noyau (les normes universelles, cf th. 2.2) a fait l'objet de la section précédente. Ici, on étudie la "descente" : $X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$.

Pour une extension algébrique E/F on note $\mathcal{H}_S^m(E, \mathbb{Z}_p(i)) = \varinjlim H_S^m(L, \mathbb{Z}_p(i))$, où les morphismes de liaison sont donnés par la restriction. On note aussi $cap^{(i)}(E/F) = Ker(H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}_S^2(E, \mathbb{Z}_p(i)))$.

On se refèrera souvent à l'hypothèse "$H_S^2(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0$ pour toute sous extension finie L/F de E/F" en disant que i est $E/F-bon$ et l'on dira simplement F-bon pour F/F-bon. Notons que 0 est F-bon si et seulement si F vérifie la conjecture de Leopoldt en p.

Fixons, comme dans la première section, un élément $a \in H_S^1(F, \mathbb{Z}_p)$ non divisible par p, F_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension qu'il détermine, F_n/F l'étage de degré p^n, $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$, $\Gamma = \Gamma_0$, $G_n = \Gamma/\Gamma_n = G(F_n/F)$, et $\alpha = \varprojlim \alpha_n \in \varprojlim H_S^1(F_n, \mathbb{Z}_p)^\Gamma$ un élément vérifiant $\alpha_0 = a$. Remarquons que $\alpha_n \in H_S^1(F_n, \mathbb{Z}_p)$ est un élément non divisible par p, et qui définit la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F_n. Par abus de notation, on appelle encore $cor_F^{F_\infty}$ l'application naturelle $X^{(i)}(F_\infty) \to H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (c'est la limite projective des applications de co-restriction). $X^{(i)}(F_\infty)^0$ désigne le sous-module fini maximal de $X^{(i)}(F_\infty)$. Rappelons d'abord le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *i est F_n-bon.*
2. *$X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} \subset X^{(i)}(F_\infty)^0$.*
3. *$H_S^2(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ est fini.*
4. *$\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} = 0$.*
5. *$t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_{\Gamma_n}$ est fini.*

Preuve : L'équivalence de 1, 2 et 3 est immédiate (cf [Sch]). Pour l'équivalence de 1, 4 et 5, on renvoie à [NV].

□

Il est bien connu que tout $i \geq 2$ est F_n-bon : cela résulte de la surjectivité des caractères de Chern p-adiques : $K_{2i-2}\mathcal{O}_{F_n}^S \otimes \mathbb{Z}_p \to H_S^2(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ ([Sou]).

Notons I l'idéal d'augmentation de Λ (ie. le noyau de $\Lambda \to \mathbb{Z}_p$). Le théorème suivant exprime le lien entre cup-produit et capitulation :

Théorème 3.2 *Pour tout corps de nombres F et tout $i \neq 0$, on a*

$$H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor_F^{F_\infty}(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma)$$

et il y a une suite exacte

$$0 \to H_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a \longrightarrow H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow IX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to 0$$

Si l'on suppose de plus que i est F_∞/F-bon (par ex. $i \geq 2$), alors

$$cap^{(i)}(F_\infty/F) = cor_F^{F_\infty} X^{(i)}(F_\infty)^0 \simeq (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma$$

et il y a une suite exacte

$$0 \to H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a \longrightarrow cap^{(i)}(F_\infty/F) \longrightarrow I(X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma \to 0$$

Remarque 3.3 *Nous invitons le lecteur à comparer la première suite exacte ci-dessus avec le th. A (ou 6.3) de [Sh]. L'auteur y considère certains produits de Massey, dont le cup produit est un cas particulier, et obtient dans ce contexte un résultat analogue, mais au-dessus de l'extension cyclotomique.*

Preuve de 3.2 : La seconde affirmation est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.4 *Si i est F_∞/F-bon alors la capitulation de $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ dans F_∞ est décrite par la suite exacte suivante :*

$$0 \to (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma \xrightarrow{cor_F^{F_\infty}} H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{res_F^{F_\infty}} \mathcal{H}^2_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \to 0$$

En d'autres termes, $cap^{(i)}(F_\infty/F) = cor_F^{F_\infty} X^{(i)}(F_\infty)^0$.

La preuve de ce lemme est standard en théorie d'Iwasawa (cf par ex. [NV] lemme 3.3), compte-tenu de l'isomorphisme $X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n} \simeq H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$.

$\square$

Passons à l'égalité

$$H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor_F^{F_\infty}(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma)$$

sous la seule hypothèse $i \neq 0$. Comme dans la section 2, considérons le cup-produit

$$\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \varprojlim H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to X^{(i)}(F_\infty)$$

Le théorème 1.1 dit que les flèches horizontales supérieures sont des isomorphismes dans le cube commutatif suivant (voir la preuve du théorème 2.2 pour la commutativité de la face supérieure) :

$$
\begin{tikzcd}
 & \hat{E}_2^{0,1}(F_m) \arrow[rr, "\cup\alpha_m", "\sim"'] \arrow[dl, "(r\hat{e}s_{F_n}^{F_m})^{-1}"'] & & \hat{E}_2^{0,2}(F_m) \arrow[dl, "c\hat{o}r_{F_n}^{F_m}"'] \arrow[dd, "c\hat{o}r_F^{F_m}"] \\
\hat{E}_2^{0,1}(F_n) \arrow[rr, "\cup\alpha_n", "\sim"'] & & \hat{E}_2^{0,2}(F_n) \arrow[dd, "c\hat{o}r_F^{F_m}"] & \\
 & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[uu, "r\hat{e}s_F^{F_m}"'] \arrow[rr, "\cup a_m"] \arrow[dl] & & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^m \arrow[dl] \\
H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[uu, "r\hat{e}s_F^{F_n}"] \arrow[rr, "\cup a_n"] & & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^n &
\end{tikzcd}
$$

où l'on a noté, par manque de place, $\hat{E}_2^{0,q}(F_n) = \hat{H}^0(G_n, H^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$.

Par passage à la limite projective, on obtient donc un carré commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim \hat{H}^0(G_n, H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[r, "\cup\alpha", "\sim"'] & \varprojlim \hat{H}^0(G_n, H^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[d, "c\hat{o}r_F^{F_\infty}"'] \\
H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \arrow[u, "r\hat{e}s_F^{F_\infty}"] \arrow[r, "\cup a"] & H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{tikzcd}
$$

La première égalité du théorème provient alors, via le lemme 2.1, de la surjectivité de la première flèche verticale.

Pour obtenir les suites exactes cherchées, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.5 *Pour tout Λ-module M, le conoyau de l'application naturelle $M^\Gamma \to M_\Gamma$ est isomorphe à IM_Γ*

Preuve du lemme : Soit γ un générateur de Γ. La suite exacte

$$0 \to M^\Gamma \longrightarrow M \xrightarrow{\gamma-1} IM \to 0$$

donne par Γ-cohomologie une suite exacte

$$0 \to IM^\Gamma \longrightarrow M^\Gamma \longrightarrow M_\Gamma \longrightarrow IM_\Gamma \to 0$$

□

Appliquant le lemme au module $M = X^{(i)}(F_\infty)$ (resp. $M = X^{(i)}(F_\infty)^0$), on obtient la première (resp. la seconde) suite exacte. Cela termine la preuve du théorème.

□

En remplaçant F par F_n, et donc a par α_n, on obtient le résultat asymptotique suivant :

Corollaire 3.6 *On suppose que $i \neq 0$ est F_∞/F est bon. L'inclusion*

$$H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n \subset cap^{(i)}(F_\infty/F_n)$$

est une égalité pour n suffisamment grand.

□

Le lemme suivant précise la signification de l'égalité éventuelle

$$H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n = cap^{(i)}(F_\infty/F)$$

Lemme 3.7 *On suppose que $i \neq 0$ est F_∞/F-bon. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $H^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n = cap^{(i)}(F_\infty/F)$.
2. $H^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_m = cap^{(i)}(F_\infty/F)$ *pour tout* $m \geq n$.

3. $cap^{(i)}(F_\infty/F_n) = cap^{(i)}(F_\infty/F_{n+1})$.
4. $cap^{(i)}(F_\infty/F_n) = cap^{(i)}(F_\infty/F_m)$ *pour tout* $m \geq n$.
5. $X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} = X^{(i)}(F_\infty)^0$.

Montrons d'abord l'équivalence de 1, 2 et 5. Il suffit de montrer $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2$. Il suffit de remplacer F par F_m (et donc a par α_m) dans la première égalité du théorème 3.2 pour obtenir $5 \Rightarrow 2$. L'implication $1 \Rightarrow 5$ découle directement de la seconde suite exacte du théorème en remplaçant F par F_n (et donc a par α_n).

Passons à la l'équivalence de 3, 4 et 5. Il suffit de montrer $3 \Rightarrow 5$. Soit I_n le noyau de l'augmentation $\Lambda \to \mathbb{Z}_p[G_n]$ et $\nu_{n+1,n} = \frac{\gamma^{p^{n+1}}-1}{\gamma^{p^n}-1}$ où γ est un générateur de Γ. 3 signifie que $I_{n+1}(X^{(i)}(F_\infty)^0) = I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0)$, mais alors l'application surjective

$$I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0) \stackrel{\nu_{n+1,n}}{\to} I_{n+1}(X^{(i)}(F_\infty)^0)$$

est automatiquement injective, et cela n'est possible que si $I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0)$ est trivial, c'est-à-dire $X^{(i)}(F_\infty)^0 = X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n}$.

□

En faisant varier a, on obtient le théorème principal annoncé dans l'introduction :

Théorème 3.8 *Soit F un corps de nombres quelconque ; si $i \neq 0$ est $\tilde{F}/F$-bon, alors*

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup H^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \subset cap^{(i)}(\tilde{F}/F)$$

□

4 Le problème de capitulation faible

Soit F un corps de nombres contenant μ_p, et fixons $i \in \mathbb{Z}$, $\tilde{F}/F$-bon. On suppose dans toute la suite que $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0$ (cela revient à écarter le cas trivial où G_S est pro-p-libre). On s'intéresse au problème de capitulation suivant :

Question 4.1 *A-t-on toujours $cap^{(i)}(\tilde{F}/F) \neq 0$?*

Dans [G2], R. Greenberg a émis la conjecture suivante :

Conjecture 4.2 *([G2] conj. 3.5)(GG) : Pour tout corps de nombres F, $X'(\tilde{F})$ est un $\tilde{\Lambda}$-module pseudo-nul.*

Comme on a supposé que F contient μ_p, il est facile de voir que $X^{(i)}(\tilde{F}) \approx X'(\tilde{F})(i)$. De plus on peut montrer que pour les bons i, la pseudo-nullité de $X^{(i)}(\tilde{F})$ équivaut à la trivialité de $\mathcal{H}^2_S(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i))$ (cf [V1] ou [NV]). On peut donc considérer le problème qui nous occupe comme l'étude d'un version faible de la conjecture (GG) :

Conjecture 4.3 $GGf^{(i)}$ *: La question 4.1 admet une réponse positive.*

Dans le cas où $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique d'ordre p, la conjecture $GGf^{(i)}(F)$ entraîne en fait la conjecture (GG) elle-même (voir [NV], th. 1.5). On renvoie à [V1] pour un exposé détaillé de différentes versions affaiblies de la conjecture (GG) ainsi que pour le lien avec une conjecture de W. McCallum et R. Sharifi concernant le cup-produit $c_{1,1}$ (celle-ci concerne seulement le corps $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, cf [MCS], conj. 5.3).

Autour de la conjecture GGf

On souhaite maintenant étudier la conjecture 4.3. L'approche la plus naturelle de ce problème consisterait à chercher un analogue du corps de Hilbert pour lequel on pourrait énoncer un analogue du théorème de l'idéal principal pour $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. Le candidat naturel est $H_F(\mu_{p^k})$, $k >> 0$, H_F désignant le (p)-corps de Hilbert de F. Il convient donc de se poser la question suivante :

Question 4.4 *Soit L'_∞/F^c_∞ la pro-p-extension non ramifiée, S-décomposée, maximale de F_∞. Est-ce que $H^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule dans L'_∞/F ?*

La réponse à cette question ne peut être affirmative en général. En effet :

Proposition 4.5 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. On suppose que $i \neq 0$ est L'_∞/F-bon. Si $G(L'_\infty/F^c_\infty)$ est pro-p-libre, alors :*

$$cap^{(i)}(L'_\infty/F) = 0$$

Idée de preuve : Le point crucial est l'injectivité du transfert $X'(F^c_\infty)/p \to X'(E)/p$ pour toute sous-extension finie E/F^c_∞ de L'_∞/F_∞. On renvoie à [V1] pour les détails.

$\square$

Remarque 4.6 *Notons* λ *et* μ *les invariants d'Iwasawa du module* $X'(F^c_\infty)$*. L'hypothèse de liberté est vérifiée par exemple si* $\lambda = 1$*,* $\mu = 0$ *et* $cap^{(i)}(F^c_\infty/F) = 0$*. C'est le cas pour* $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$*, si* $\lambda = 1$ *et si* p *vérifie la conjecture de Vandiver.*

Remarque 4.7 *En fait cette proposition admet une réciproque ([NQD] th. 3.1) : Soit* F *un corps de nombres contenant* μ_p*. On suppose que l'invariant d'Iwasawa* $\mu(X'(F^c_\infty))$ *est trivial. Si* $cap^{(2)}(L'_\infty/F) = 0$*, alors* $G(L'_\infty/F^c_\infty)$ *est pro-p-libre.*

Parallèlement, il est naturel de chercher à atteindre les éléments du noyau sauvage $Ker^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (cf. Notations) par cup-produit avec des éléments "sauvages". Comme le noyau de localisation $Ker^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ est nul, il convient de regarder le cup-produit modulo p^k avec des éléments de $Ker^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k)$. Là encore, la proposition suivante montre que la situation n'est pas si simple.

Proposition 4.8 *Si la pro-p-extension non ramifiée* (p)*-décomposée maximale de* F^c_∞ *est pro-p-libre, alors l'image du cup-produit restreint à*

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes Ker^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k) \to H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$$

est nulle.

Preuve : On renvoie à [V1].

$\square$

Il est néanmoins possible, grâce aux résultats de la section 3, de construire des familles de corps vérifiant $GGf^{(i)}$.

Théorème 4.9 *Soit* F *un corps de nombres contenant* μ_p*. On suppose que la conjecture de Leopoldt est vraie pour toute sous-extension finie de* $\tilde{F}/F$*. Si* F *contient un corps quadratique imaginaire* k *dans lequel* (p) *se décompose, alors* $GGf^{(i)}$ *est vraie pour* F *dès que* i *est* $\tilde{F}/F$*-bon.*

Rappelons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.10 *Soit F'/F une sous-extension finie d'une pro-p-extension galoisienne F''/F. Si i est F'-bon, alors*

$$cap^{(i)}(F''/F) = 0 \Rightarrow cap^{(i)}(F''/F') = 0$$

Preuve : cf [NV] lemme 3.4.

$\square$

Le lemme ci-dessus va nous permettre d'appliquer le théorème 3.2, non pas au niveau de F (ce qui semble a priori trop ambitieux en général puisque le cup-produit ne remplit le noyau de capitulation qu'asymptotiquement, cf cor. 3.6), mais au niveau d'une sous-extension L/F de $\tilde{F}/F$, triviale en v. La stratégie est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.11 *Soit $F \supset \mu_p$ un corps de nombres, et fixons $i \neq 0$ $\tilde{F}/F$ bon. S'il existe une (p)-place v et une sous-extension finie L/F de $\tilde{F}/F$, triviale en v, et vérifiant*

$$rg_p\, Im(H^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i))/p \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p(i))) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p(i)) + 1$$

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

alors $cap^{(i)}(\tilde{F}/L) \neq 0$.

Preuve : Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & H^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & H^2_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(F_v, \mathbb{Z}/p(i)) & \otimes & H^1(F_v, \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\cup} & H^2(F_v, \mathbb{Z}/p(i))
\end{array}$$

montre, compte-tenu de la non-dégénérescence du symbole de Hilbert et des minorations de l'énoncé, que l'image du cup-produit de la première ligne du diagramme est non triviale. On en déduit $cap^{(i)}(\tilde{F}/L) \neq 0$ par le théorème 3.2.

$\square$

Notons $\tilde{I}_v(F)$ (resp. $\tilde{D}_v(F)$) le sous-groupe d'inertie (resp. de décomposition) de $\tilde{\Gamma}$ relatif à v.

Lemme 4.12 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p, alors il existe une (p)-place v telle que*

$$rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{I}_v(F) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Si de plus F contient un corps quadratique imaginaire dans lequel (p) se décompose, alors il existe une sous-extension finie L/F de $\tilde{F}/F$ vérifiant $L_v = F_v$ et

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Preuve : Comme le groupe de classes est fini, c'est que les sous-groupes d'inertie $\tilde{I}_v(F)$ engendrent un sous-groupe d'indice fini dans $\tilde{\Gamma}$. Il y a donc une inégalité

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in S(F)} [F_v : \mathbb{Q}_p] = 1 + r_2(F) = rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{\Gamma} \leq \sum rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{I}_v(F)$$

et celle-ci montre qu'il existe un groupe d'inertie $\tilde{I}_v(F)$ dont le $\mathbb{Z}_p$-rang est strictement supérieur à $\frac{1}{2}[F_v : \mathbb{Q}_p] = \frac{1}{2} rg_{\mathbb{Z}/p}\, H^1(F_v, \mathbb{Z}/p) - 1$, ce qui donne la première inégalité de l'énoncé puisque $[F_v : \mathbb{Q}_p]$ est pair.

Comme k est un corps quadratique imaginaire, on sait que l'extension résiduelle de $\tilde{k}/k$ en v est infinie (cf [Mi1] lemma 3.1, la preuve repose sur un calcul idélique, rendu possible grâce à la finitude des unités de k). Celle de $\tilde{F}/F$ l'est donc aussi, mais alors

$$rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{D}_v(F) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p) + 1$$

Le choix d'une section de l'injection naturelle $\tilde{D}_v(F) \otimes \mathbb{Q}_p \to \tilde{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}_p$ produit alors une sous-$\mathbb{Z}_p$-extension multiple E/F de $\tilde{F}/F$, dans le groupe de laquelle $\tilde{D}_v(F)$ s'injecte avec un conoyau fini. $L = E^{\tilde{D}_v(F)}$ possède alors les propriétés requises.

$\square$

Preuve du théorème 4.9 : Grâce au lemme 4.10, on voit qu'il n'est pas restrictif de supposer que $cap^{(i)}(L_\infty^c/L) = 0$ pour toute sous-extension finie L/F de $\tilde{F}/F$. Mais dans ces conditions, R. Greenberg a montré que le noyau de Tate $H_S^2(L, \mathbb{Z}_p(2))$ coïncide, comme sous-groupe de $H_S^1(L, \mathbb{Z}/p)$, avec $H^1(\tilde{L}/L, \mathbb{Z}/p)$. En examinant l'argumentation de [G1] §6 (voir aussi [AM], [Hu] et [V2] pour une argumentation par "cup produit"), on voit qu'en fait, les "noyaux de Tate généralisés" $H_S^1(L, \mathbb{Z}_p(i))/p$ coïncident, comme sous-groupes de $H^1(L, \mathbb{Z}/p)$, pour tous les i qui sont L-bons. Sous les hypothèses du théorème, le lemme 4.12 donne une sous-extension finie L/F de $\tilde{F}/F$ vérifiant

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Comme i et 0 sont L-bons par hypothèse, la discussion qui précède montre alors que

$$H_S^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}/p) \subset H_S^1(L, \mathbb{Z}_p)/p = H_S^1(L, \mathbb{Z}_p(i))/p$$

Les deux inégalités de la proposition 4.11 sont donc vérifiées et cela permet de conclure grâce au lemme 4.10, appliqué avec $F \subset F' = L \subset F'' = \tilde{F}$.

Remarque 4.13 *L'hypothèse concernant la conjecture de Leopoldt sert uniquement à effectuer un changement de twist. Celui-ci a lieu au niveau du corps L mais comme on ne s'intéresse qu'à des $\mathbb{Z}_p$-extensions qui proviennent de F, le théorème 4.9 est encore valable si l'on suppose seulement que F vérifie la conjecture de Leopoldt, voir [V1] pour les détails et [V2] concernant les changements de twists.*

Remarque 4.14 *Soit F comme dans le théorème 4.9. Si $H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique et si $Ker_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0$ (c'est équivalent à $\mathcal{C}l_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$ et $X'(F_\infty^c) \neq 0$), on voit que l'on obtient de la capitulation "sauvage", ie. $cap^{(i)}(\tilde{F}/F) \cap Ker_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0$. Si maintenant $H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique d'ordre p, alors F vérifie (GG), et l'on retrouve ainsi un cas connu ([Mi1] prop 3.B, [Mi2] th. 2) puisqu'alors on a nécessairement $s(F) = 2$ et $\mathcal{C}l_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$.*

Références

[AM] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for Étale Capitulation Kernels*, K-Theory, **33** (2004), 199-213.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Landmarks (1973).

[DF] W.G. Dwyer, E.M. Friedlander, *Algebraic and étale K-theory*, Trans. Am. Math. Soc. **292**, No. 1 (1985), 247-280.

[FGS] L. Federer, B.H. Gross, with an appendix by W.Sinnott, *Regulators and Iwasawa Modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443-457.

[G1] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. of Math. **100**, No.6. (1978), 1235-1245.

[G2] R. Greenberg, *Iwasawa theory, past and present*, Adv. Studies in Pure Math. **30** (2001), Class Field Theory - Its Centenary and Prospect, 335-385.

[Gr] C. Greither, *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **6** (1994), 205-220.

[Hu] K. Hutchinson, *Tate kernels, étale K-theory and the Gross Kernel*, Preprint (2005).

[J1] U. Jannsen, *Iwasawa Modules up to Isomorphism*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1989), 171-207.

[J2] U. Jannsen, *Continuous Étale Cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207-245.

[Ka] B. Kahn, *Descente Galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-Theory **7** (1993), 55-100.

[Ko] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9-24.

[KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000), 35-65.

[Ku] L.V. Kuz'Min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math. USSR Izvestija **6**, No.2 (1972), 263-321.

[MCS] W. McCallum, R. Sharifi, *A cup product in the Galois cohomology of number fields*, Duke Math. J. **120**, No.2. (2003), 269-309.

[Mi1] J. Minardi, *Iwasawa modules for ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions of algebraic number fields*, Thesis, University of Washington (1985).

[Mi2] J. Minardi, *Iwasawa modules for ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions of number fields*, Canadian Math. Soc., Conf. Proc. **7** (1987), 237-242.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer (2000).

[NQD] T. Nguyen Quang Do, *K_3 et formules de Riemann-Hurwitz p-adiques*, K-theory **7** (1993), 429-441.

[NV] T. Nguyen Quang Do, D. Vauclair, *K_2 et conjectures de Greenberg dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions multiples*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **17** (2005), 693-712 (à paraître).

[Sch] P.Schneider, *Über Gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181-205.

[Se1] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann (1968).

[Se2] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Springer (1994).

[Sh] R. Sharifi, *Massey products and ideal class groups*, preprint (2005).

[Sou] C.Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[Ta] J.Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V1] D. Vauclair, *Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions d'un corps de nombres*, Thèse, Besançon (2005).

[V2] D. Vauclair, *Note sur les noyaux de Tate généralisés*, en préparation (2005).

[V3] D. Vauclair, *Sur les normes universelles et la structure de certains modules d'Iwasawa*, en préparation (2005).

David Vauclair
vauclair@math.univ-fcomte.fr
Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques
CNRS UMR 6623
16, route de Gray
25030 BESANCON CEDEX
France